TG4

FRAÇÕES: UMA ANÁLISE DE DIFICULDADES CONCEITUAIS

Iole de Freitas Druck - Abril de 1994 e Novembro de 2005
Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

São inúmeros os estudantes, em todos os níveis de escolaridade, que apresentam dificuldades com frações, acarretando graves entraves no prosseguimento de seus estudos sobre números, operações, álgebra ou funções. Gostaria de destacar três aspectos cruciais que exigiriam abordagem mais cuidadosa ao longo do processo de ensino-aprendizagem de frações. A meu ver eles correspondem a questões conceituais fundamentais e complexas das quais depende a possibilidade de compreensão desse conteúdo matemático, dos procedimentos operatórios que engloba e da sua utilização proveitosa na resolução de situações-problema. Para avançar além da mecanização de regras é preciso garantir aos alunos convívio, discussão e atribuição de significados a essas noções. São elas:

A) A própria idéia ou conceito de fração;
B) A relação de equivalência entre frações;
C) O significado das quatro operações fundamentais no universo das frações.

Procuramos aqui discutir os problemas conceituais envolvidos nos tópicos citados, colocar algumas pistas de como enfrentá-los e, sobretudo, deixar claro que a superação destas dificuldades ilumina o caminho do aprendizado duradouro e significativo das frações. Pretendemos contribuir com subsídios para a reflexão sobre o conteúdo "frações" e para uma prática docente em sala de aula que leve em conta as dificuldades mencionadas.

A) O CONCEITO DE FRAÇÃO

Em Matemática a notação *p/q* indica diferentes noções, dependendo do contexto no qual é empregada: uma **fração**, a indicação de uma **divisão de *p* por *q***, uma **razão** ou um **número racional**. Além disso, em linguagem corrente, a palavra "fração" significa "pedaço", "porção" (de alguma coisa), o verbo "fracionar" refere-se a "partir", "quebrar" ou "dividir" (algo). É pouco provável que a primeira vez que o aluno se depare com a palavra "fração" seja na escola. É assim bastante provável que ele já traga algum significado anterior para ela, que pode funcionar como obstáculo para a necessidade de acrescentar significados à palavra a fim de incorporar o(s) sentido(s) técnico(s) que o vocábulo possui para a Matemática. Analisemos um pouco cada uma das acepções matemáticas associadas ao conceito de fração.

1) Fração como relação parte-todo:

Os livros didáticos de Matemática geralmente apresentam uma definição como a que segue para uma fração p/q, priorizando normalmente este aspecto na introdução do conceito:

A notação p:q representa a fração ou pedaço correspondente a p partes de uma unidade ou todo que foi dividido em q partes iguais.

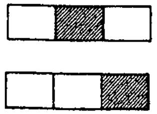
Essa definição, mesmo sendo correta, é bastante vaga e problemática, apesar do enunciado aparentemente simples (para um adulto que já domina o conceito). Vejamos

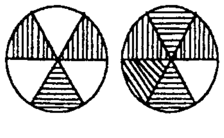
alguns exemplos, ou modelos, para a fração $\frac{2}{3}$ que, segundo ela, representa duas partes de uma unidade (ou todo) que foi dividida em três partes iguais

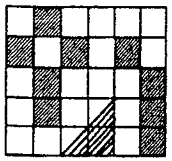
1)  2/3 de uma barra de chocolate

2)  2/3 de uma coleção de 6 maçãs

3)  2/3 de uma coleção de 6 maçãs

4)  2/3 de uma barra de chocolate

5)  2/3 de duas pizzas

6)  2/3 da área de um terreno de 5m x 6m está sem grama

7)  2/3 de uma barra de chocolate

8)  2/3 de um litro de leite

9)  2/3 dos palitos de fósforo estão riscados

10) 2/3 dos exemplos anteriores são modelos contínuos de frações (quais?) E este exemplo, junto com os restantes (quais?) corresponde a um modelo discreto de fração.

11) A Região norte corresponde a cerca de 1/3 do território brasileiro. Por que?

12) Como podemos contar, o Brasil tem 27 unidades federativas: 26 estados e mais o distrito federal. Por que podemos dizer que a região nordeste possui 1/3 das unidades federativas do Brasil?

Por meio desses exemplos quero chamar a atenção para o fato de que os três ingredientes fundamentais, usualmente empregados para conceituar fração, apresentam dificuldades para serem devidamente compreendidos no grau de generalidade exigido para que o conceito matemático não seja deturpado. São eles:
- unidade ou todo;
- partes da unidade;
- igualdade entre as partes.

Observe que, nos exemplos 1, 4 e 7, a unidade ou todo é a mesma (uma barra de chocolate), o que muda são as partes e o sentido em que os pedaços são partes do (mesmo?) todo e são iguais. Em que sentido, no exemplo 6, se pode dizer que a área branca representa 2 partes de um todo que foi dividido em 3 partes iguais? Mesma pergunta para o 5 e o 8 – neste último caso é, na prática, difícil individualizar a parte. O que são a unidade e a parte nos modelos 2, 3 e 9? Temos direito de chamar uma coleção de 15 objetos de uma unidade, e uma coleção de 5 objetos de uma parte? Isto é claro para uma criança? O aluno pode perceber a diferença entre os "todos" as "partes" e o sentido em que são "iguais" nos exemplos 11 e 12, onde o suporte da ilustração é o mesmo? A partir de que série?

Tracemos um paralelo. Uma criança pequena só aprende a falar, por exemplo, a palavra "cachorro" (ou, só domina a conceito de cachorro), quando sua vivência com animais for suficientemente rica para, por um lado, diferenciar um cão de um gato ou de um cavalo e, por outro, colocar na mesma categoria, um pequenês, um pastor alemão ou um vira-lata comum. Na cidade, num primeiro momento, ela chama todos os animais de "au-au". À medida que sua experiência direta com animais cresce, vai aprendendo os traços diferenciais e os identificadores de cada espécie animal – só aí consegue nomeá-los com palavras diferentes, o que indica que absorveu os respectivos conceitos. Da mesma forma, o desenvolvimento da idéia abstrata correta de fração se dará na criança pelo convívio com várias situações-problema onde este conceito intervenha significativamente. Ela irá do estágio de preferir a "metade maior da maçã" para compreensão do conceito "metade" a partir da sua experiência pessoal. E tanto melhor, ou seja, tanto mais abrangente e correta do ponto de vista conceitual será a noção de fração que ela venha a desenvolver, quanto mais próximos a ela e diversificados forem os exemplos ou situações-problema com que for solicitada a interagir. Nesse sentido é possível, e mesmo conveniente, iniciar o convívio com frações simples desde a pré-escola. Ainda mais que a nomenclatura nova envolvida no estudo das frações é extensa, por exemplo, a cada denominador corresponde uma nova palavra (meio, terço, quarto, doze avos, vinte avos, décimos, centésimos ...). Não é plausível imaginar que todo esse tipo de informação seja assimilável significativamente num curto espaço de tempo!

Exercícios:
1. Explicite as diferenças entre os 10 exemplos ou modelos para a fração 2/3 dados anteriormente.
2. Invente outros exemplos que correspondam a modelos distintos de todo e de partes, inclusive para frações impróprias, e que, na sua diversidade, facilitem o trabalho em classe para o desenvolvimento da idéia abstrata de fração. Pense em exemplos ou situações-problema apropriados a todas as faixas etárias, da pré-escola à 5ª série do Ensino Fundamental.

Neste texto estou interessada em sublinhar que, ao simplificar os "desenhos" que se faz para "ilustrar" a definição de fração, dificultamos a compreensão, por parte do aluno, do conceito abstrato. No limite do estereótipo, talvez possamos convencer o estudante que uma fração é um pedaço ou mais de uma barrinha retangular... É necessário esclarecer que aquilo que se chama de *todo* ou *unidade* é uma noção bastante flexível, que varia conforme o contexto ou problema. É preciso ficar claro que, uma vez fixado, o todo funciona como *padrão* único de referência para o problema – neste sentido, *unidade*. Mas, dependendo do problema, também é necessário ficar claro que se deve dispor de um estoque de vários "todos" equivalentes – o que nos permite obter as frações impróprias, maiores do que a unidade. Por outro lado, a *igualdade* entre partes não envolve forma, cor ou outras características materiais dos modelos, mas é, na verdade uma *equivalência* entre partes, dada pela igualdade entre algum tipo de medida - aquela que se aplique às partes enfocadas (podendo ser área, massa, número de elementos, volume, capacidade, ...), geralmente não explicitada no problema.

São muitas as variações, nuances ou convenções sintetizadas ou implícitas na definição usual de fração. Considerando-se a faixa etária da fase escolar em que elas são ou devem ser introduzidas, não é possível imaginar tratá-las diretamente, como o fiz no parágrafo anterior – nomeando-as todas, sistematizando-as todas. Assim torna-se necessário apresentar muitas situações de interesse dos alunos, correspondentes a vivências de realidade possível (não simplesmente frações de figuras geométricas, por exemplo), onde problemas que demandem medir pedaços não inteiros tornem necessário o emprego de novas convenções numéricas. Pode-se dar inicialmente aos alunos a prerrogativa de inventar nomes para os diferentes pedaços. É prejudicial introduzir rapidamente a notação e a nomenclatura oficiais da aritmética, antes que eles tenham atribuído significado claro à diferença entre, por exemplo, a metade, a terça parte ou o quinto. A professora Dra. Nilza Bertoni, numa pesquisa (cf. Bertoni 2004), constatou que a precocidade na introdução da nomenclatura "correta" dificulta a apropriação pelos alunos de relações fundamentais para o uso operacional significativo das frações como as descritas pelos enunciados: "em frações unitárias, quanto maior o denominador, menor o tamanho do pedaço" e "quanto maior o numerador de frações com o mesmo denominador, mais se está considerando".

2) Fração como quociente indicado, como razão ou como número racional

Muitas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental apresentam os conteúdos mencionados no subtítulo na seguinte ordem: primeiro é introduzida a *divisão* de números naturais; em série posterior *frações* são trabalhadas; mais adiante ainda aparecem as *razões*; os *números racionais* comparecem ao final. Normalmente o próximo conteúdo é abordado sem nenhuma indicação sobre como se relaciona com o(s) anterior(es). Muitas vezes são dadas definições que simplesmente reduzem um conceito ao outro, do tipo "razão é fração" ou "fração é divisão", "racional é um número de forma p/q, onde p e q são números inteiro, com q = 0". Em geral não há comentários sobre o fato de mais de uma palavra designar essa "mesma coisa" ou de ser utilizada a mesma notação para vários conceitos. Tal confusão se aprofunda ainda mais quando, avançando o estudo pelo campo da álgebra, começam a aparecer expressões como por exemplo $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, onde a barra da fração serve para indicar uma divisão entre polinômios, ficando implicitamente estabelecido o status definitivo de uma divisão indicada para ela também na álgebra.

O uso de todas essas "identificações", mais ou menos explicitadas, é amplamente difundido e não está errado do ponto de vista técnico da Matemática. Mas elas representam obstáculos importantes à aprendizagem significativa das várias noções. Evidentemente cabe perguntar: afinal, fração, razão e divisão indicada são realmente nomes distintos para a mesma coisa? Qual a diferença entre número racional e fração? Quais as diferenças entre essas noções, como se inter-relacionam? Por que se justifica o emprego da mesma notação de barra para as quatro? Não conheço nenhum texto que aborde essa problemática explicitamente. Ma parece-me importante refletir sobre essas questões, percebê-las claramente e observar se tais identificações não estão confundindo nosso aluno, bloqueando sua compreensão. A consciência do professor sobre esse tipo de dificuldades pode favorecer a elaboração de transposições ou de situações didáticas mais eficazes para o tratamento desses conceitos em sala de aula. Examinemos um pouco mais de perto essas questões.

O Pequeno Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa, de Aurélio Buarque de Holanda Ferreira (11ª edição, 1967) contém os seguintes verbetes. ***Divisão**: Operação que tem por fim determinar o maior número de vezes que um número chamado dividendo contém outro que se chama divisor. Partilha, repartição. **Quociente**: Quantidade resultante da divisão de uma quantidade por outra. **Fração**: Parte de um todo; número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais. **Razão**: Porcentagem; relação entre grandezas de mesma espécie; (de dois números): se os números forem dados numa certa ordem (com o segundo diferente de zero) é o quociente do primeiro pelo segundo; (de duas grandezas): se as grandezas forem de mesma espécie, é o número que exprime a medida de uma delas quando se toma a outra por unidade.*

Parece que estes verbetes não resolvem completamente o nosso problema. Um se refere ao outro e, por análise direta do texto, fica difícil discernir quais são as reais diferenças entre eles. Podemos observar, no entanto, que somente o primeiro não faz referência a algum outro no seu enunciado. Por outro lado, a divisão, ou o seu resultado, comparece nas definições das demais noções.

De fato, reexaminando os exemplos de frações discutidos anteriormente, ou outros, podemos nos dar conta da presença, implícita ou explícita, de divisões, repartições, subdivisões ou outras formas concretas ou mentais de visualizar um pedaço de um todo como uma determinada fração. Assim uma idéia da divisão está realmente na base do conceito de fração. Ao repartir dois pães por três crianças, cada uma receberá 2/3 de pão. Ou seja, a quantidade de pão recebido é o resultado de 2 (pães) divididos por 3 (crianças) – portanto um quociente. É assim natural que a fração 2/3 (o número que expressa tal quantidade, a quantifica) indique o quociente entre os números 2 e 3. Observemos ainda que essa "naturalidade" só se apresenta em modelos onde temos mais de um todo para ser repartido, mesmo que o resultado não seja uma fração imprópria.

O conceito de razão é mais abstrato do que o de fração como relação parte-todo. Talvez se possa dizer que ele seja um passo de abstração intermediário entre esse último e o conceito de número racional. Deixarei essa discussão para uma outra ocasião.

B) A RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE FRAÇÕES

Dos três aspectos listados inicialmente, este é certamente o menos complexo. Vale o destaque por ser equivalência entre frações uma relação fundamental, que não pode deixar de ser bem assimilada se quisermos que os alunos avancem além da mecanização de técnicas ou regras. Se, por um lado, é impossível abordar esta "igualdade entre frações" sem que os alunos tenham alguma noção da idéia de fração, é também impossível esperar a compreensão mais profunda do próprio conceito de fração, bem como dos algoritmos das operações entre frações, se aquela relação não tiver sido previamente absorvida. Observamos mais vez os exemplos dados anteriormente. Poderemos constatar, através deles, que todas as seguintes frações reapresentam, de forma equivalente, dois terços de um todo (quais exemplos correspondem a qual fração?).

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{20}{30}, \frac{40}{60}, \frac{6}{9}$$

A partir de uma certa idade, não é difícil para uma criança convencer-se de que comer uma metade de chocolate em 1, 2, 3 ou 4 pedacinhos redunda em haver comido a mesma quantidade de chocolate, ou seja, em notação fracionária, que:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \ldots$$

O importante não é que os estudantes aprendam mecanicamente as várias seqüências de frações equivalentes, no estilo da seqüência acima. Eles precisam é não ter dúvidas sobre o significado "concreto daquelas igualdades".

Observemos que a compreensão da equivalência entre frações reforça, retoma e mesmo esclarece a própria idéia de fração. Neste contexto é sempre importante serem trabalhadas desigualdades entre frações, pois problemas deste tipo deixam mais clara a necessidade do emprego de frações equivalentes. Estudemos um problema típico (entre os pouco criativos):

Mamãe fez um bolo. João comeu $\frac{4}{15}$. Mário comeu $\frac{3}{10}$ e Alexandre comeu $\frac{2}{5}$ do mesmo bolo. Quem comeu mais bolo?

Não há evidência de que o mero ensinamento da técnica de redução ao mesmo denominador para comparar frações de fato acrescente compreensão ou autonomia de pensamento no aluno para enfrentar este tipo de problema. Pelo contrário, fornecer imediatamente esta regra retira do aluno a capacidade de sentir as dificuldades e tentar formular estratégias próprias para enfrentá-las. Podemos imaginar um diálogo, possível entre alunos que dominem o significado de fração e suas equivalentes, desde que adequadamente motivados:

A1 – Alexandre comeu 2 pedaços, Mário 3 e João 4. Então João comeu mais!

A2 – É, mas os pedaços do João eram menores de todos já que para ele o bolo foi dividido em 15 partes, para Mário em 10 e para Alexandre só em 5 partes! Precisa ver como ficam os tamanhos dos pedaços.

A3 – Cada pedaço do Alexandre vale por 2 de Mário!

A1 – Por que? Como?

A3 – Ora, como é que se consegue 10 pedaços de bolo se antes o bolo já foi dividido em 5 pedaços?

A1 – É,..., é só cortar cada um dos 5 pedaços ao meio. E aí ..., é mesmo – o pedaço do Alexandre vale por 2 do Mário! Mas então o Mário precisaria ter comido 4 pedaços para comer os mesmos $\frac{2}{5}$ do Alexandre!

A2 – Isso! Como Mário comeu só 3, ele comeu menos que o Alexandre! E o João?

A4 – Eu estava aqui pensando outra coisa. João comeu 4 pedaços do 15 em que o bolo foi dividido. Se tivesse comido 5, teria comido $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ do bolo. Então João comeu menos do que $\frac{1}{3}$ de bolo. Já o Alexandre comeu 2 pedaços de $\frac{1}{5}$ de bolo. Mas $\frac{1}{5}$ é maior do $\frac{1}{6}$, já que se eu dividir o bolo me 5 pedaços iguais obtendo pedaços maiores do que dividindo em 6 pedaços iguais. Então, Alexandre comeu mais do que 2 pedaços de $\frac{1}{6}$ de bolo. Como $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, Alexandre comeu mais do que $\frac{1}{3}$ de bolo.

A2 – Isso! Então o Alexandre comeu mais do que João também! Êta comilão...

A1 – Mas, entre o João e o Mário, que comeu mais?

A3 – Tentemos aplicar o mesmo raciocínio. Mário comeu 3 pedaços de $\frac{1}{10}$. De novo, como $\frac{1}{9}$ é mais bolo que $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ é mais bolo que $\frac{3}{10}$. Também descobri que Mário Comeu menos do que $\frac{1}{3}$ do bolo, que nem o João!

A4 – Sim, $\frac{1}{15}$ é bem menor do que $\frac{1}{10}$. Eu acho que o Mário comeu mais que o João, Mesmo se o João comeu 4 pedaços (de $\frac{1}{15}$) e o Mário comeu 3 pedaços (de $\frac{1}{10}$).

A2 – Sei não, como é que se pode ter certeza?

O diálogo e hipotético, mas plausível. Com a disponibilidade do uso de papel, tesoura, régua, lápis de cor ou papel quadriculado, não será possível levar os alunos a chegarem neste tipo de questionamento? Vale a pena, na minha opinião, pois neste caso eles estarão de fato se apropriando e colocando em funcionamento conceitos significativos para uma real compreensão das frações.

Exercício:

Tente achar uma solução gráfica ou concreta para provar que de dato, $\frac{4}{15} < \frac{3}{10}$.

Uma **observação final**. É claro que não se pode falar da equivalência de frações sem que alguma idéia de fração tenha sido introduzida. Espero que também tenha ficado clara a impossibilidade de dominar por inteiro o conceito de fração sem uma boa noção da relação de equivalência entre elas. Para que isso não vire um círculo vicioso, precisamos ter clareza de que essas duas noções são intrinsecamente ligadas e propor aos alunos, em paralelo, aproximações sucessivas das duas idéias, propiciando que, aos poucos, a complexidade e a inter-relação entre elas sejam elaboradas e compreendidas.

C) O SIGNIFICADO DAS QUATRO OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS NO UNIVERSO DAS FRAÇÕES.

Parto do pressuposto que, mesmo no campo dos números naturais, deve-se ensinar as quatro operações por serem, e como sendo, ferramentas úteis para resolver problemas. As "contas armadas" ou "algoritmos" devem ser o último tópico na abordagem de qualquer operação. Inicialmente é preciso deixar claro para o aluno, as idéias que cada operação envolve, ou seja, os tipos de situações-problema às quais elas se aplicam. Relembremos então as idéias das quatro operações fundamentais entre números naturais, que devem ser familiares aos alunos, no momento de ampliá-las ao campo das frações.

Ações ou idéias correspondentes às operações em *IN*:

- Adição: *juntar ou acrescentar;*
- Subtração: *retirar, completar ou comparar;*
- Multiplicação: *formar quantidades correspondentes à adição de parcelas iguais ou ao número de combinações entre objetos de conjuntos finitos distintos;*
- Divisão: *repartir de forma eqüitativa ou medir o dividendo usando o divisor como padrão de medida.*

Vejamos quais destas idéias fazem sentido no universo das frações.

- **C1) Adição e Subtração de Frações**

Essas operações, por terem uso em situações similares, seja envolvendo números naturais ou fracionários, não costumam apresentar uma grande dificuldade no tocante à atribuição de significados aos seus conceitos pelos alunos. Mesmo sobre pedaços (de tecidos, pizzas ou o que for) é fácil conceber que eles sejam juntados ou acrescentados uns ao outros. Também é plausível retirar-se um pedaço de outro ou querer saber "que pedaço faltaria para completar outro", ou ainda, perguntar sobre o tamanho do pedacinho que corresponde à diferença entre dois outros (e, portanto comparar). Ou seja, todas as ações correspondentes às idéias da adição ou subtração fazem sentido também no universo das frações. Aqui, portanto, a dificuldade é técnica, não é conceitual. Donde a importância das idéias discutidas anteriormente no item (B). Se os alunos dominam a equivalência entre frações, serão capazes de desenvolver estratégias próprias para resolver problemas que envolvam adições ou subtrações de frações. A introdução da técnica da "barra grande", com uma soma ou diferença em cima e o denominador comum em baixo, só fará empobrecer o processo de aprendizagem, introduzindo talvez uma dificuldade extra, um obstáculo didático, principalmente se for apresentada previamente às explorações espontâneas da classe. Um aluno que tenha incorporado o significado do denominador, não terá dúvidas sobre o resultado da adição ou subtração de frações com um mesmo denominador. Os exemplos falam por si só. "Se a dois quintos junto mais um quinto, é claro que fico com três quintos – os pedaços são todos do mesmo tamanho, têm inclusive o mesmo 'nome', é só contar com quantos pedaços fico ao final da operação". O mesmo ocorre com a subtração de frações com o mesmo denominador.

A questão é um pouco mais difícil quando aos denominadores são diferentes, ou seja, os pedaços que as frações representam não são de mesma medida. Retomemos o problema do bolo de João, Mário e Alexandre.

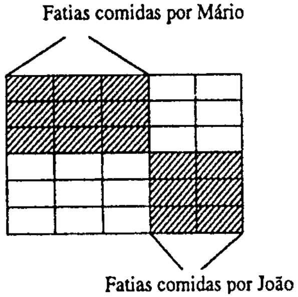
Mamãe fez um bolo. João comeu 4/15, Mário comeu 3/10 e Alexandre 2/5 do mesmo bolo. Quem comeu mais bolo?

A partir desses dados podemos formular as seguintes perguntas, entre outras:

1) Quanto do bolo Mário e João comeram juntos?
2) Quanto Mário comeu a mais do que João?

Examinemos, graficamente, em um bolo retangular, as possíveis fatias que cada um comeu:

Como fazer para saber que fração de bolo os dois comeram juntos?



Observamos que, se redividirmos as fatias de Mário, cada uma em 3 pedaços, e as fatias de João em dois pedaços iguais obteremos fatias pequenas, todas do mesmo tamanho, que nos fornecem uma nova divisão do bolo em 30 pedaços, iguais, e com os quais podemos medir tanto as fatias de Mário como as de João. Temos, assim, que Mário comeu 3/10 = 9/30 e João comeu 4/15 = 8/30 de bolo. Portanto, como,

$$\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{9}{30}+\frac{8}{30}=\frac{17}{30},$$

Obtemos a resposta para

1) Juntos os meninos comeram 17/30 do bolo.

Também daí sairá a resposta para

2) O que Mário comeu a mais é a diferença entre as duas fatias, ou seja:
3/10 – 4/15 = 9/30 – 8/30 = 1/30 de bolo.

Observemos que o simples fato de repetir o denominador (não usando a barra longa, nem introduzindo o registro com soma ou diferença no numerador) acaba por reforçar as idéias que estão sendo utilizadas para resolver a operação: a equivalência de frações e o significado da soma ou da subtração.

- **C2) A Multiplicação de Frações**

Introdução:

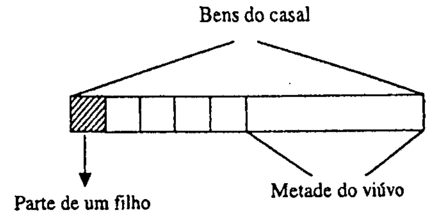
Nos casos da *Multiplicação e Divisão* dificuldades conceituais importantes se apresentam de início, pois os significados que os alunos já trazem, associados a tais operações, não mais fazem sentido no contexto das frações. Seria absurdo perguntar, por exemplo, qual é o valor da soma de 7/9 consigo próprio 2/3 de vezes. Não existe coleção com quantidade fracionária (fração própria) de elementos entre os quais seja viável estabelecer combinações. Ou seja, o produto como soma de parcelas iguais ou como número de combinações entre elementos de dois conjuntos perde tipicamente o sentido no campo das frações. O mesmo se passa com a idéia de repartição eqüitativa para a divisão: o que significaria, por exemplo, repartir 1/2 banana por 1/3 de pessoas?

É preciso assim, antes de sair "fazendo contas", atribuir significados para as operações de multiplicação e divisão entre frações, trabalhar situações-problema reais

ou verossímeis cujas soluções envolvam naturalmente tais operações. Mais ainda, é importante que os alunos se convençam que é razoável chamar de multiplicação e de divisão os procedimentos utilizados. A análise de problemas análogos envolvendo números inteiros (ou frações aparentes), deve levar o aluno a recair no uso das operações já conhecidas ar resolvê-lo aplicando os 'novos significados', introduzidos para frações.

Nesta seção discutiremos a multiplicação de frações.

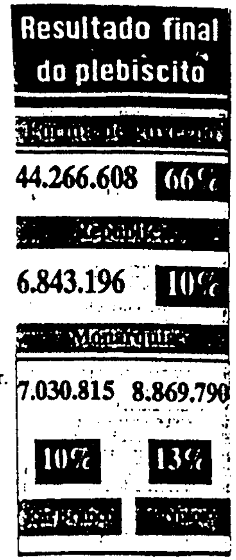
É sabido que multiplicar frações é procurar um fração de fração (uma parte de um pedaço), como nos problemas típicos de herança. Essa idéia deve ser deixada bem clara inicialmente aos alunos por meio da discussão de exemplos, o mais próximos possível do seu cotidiano ou do seu universo possível, como no exemplo a seguir. Se um casal tem 5 filhos, quando do falecimento de um dos cônjuges, cada filho caberá a quinta parte da metade dos bens do casal como herança ou seja, 1/5 de 1/2 dos bens. Vejamos graficamente que parte cabe a cada filho:



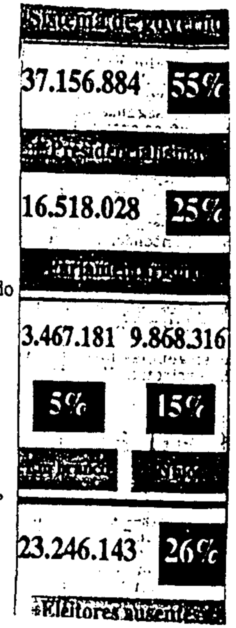
Vemos que a parte que corresponde a cada filho equivale a 1/10 do total de bens. Este número, assim obtido, se *convencionam*, chamar de produto de 1/5 por 1/2, ou seja: 1/10 = 1/5 x 1/2.

Podemos encontrar outros problemas relevantes que são desse tipo. Por exemplo, examinemos uma publicação em jornal com o resultado do plebiscito sobre a forma e sistema de governo de 1993, sobre o referendo sobre o a proibição da comercialização de armas em 2005 ou sobre o resultado de alguma eleição presidencial.

Várias perguntas podem ser feitas a partir de uma tabela com os votos obtidos nas distintas possibilidades. No plebiscito de 1993 me ocorreu perguntar qual foi o percentual de brasileiros eleitores que realmente fez uma opção clara pela República como forma de Governo? Isto porque, somando-se os votos dados à República, com os que a Monarquia recebeu, mais os em branco e nulos, constatei que a soma era igual ao total de votantes, portanto estavam excluídos da tabela os eleitores que se abstiveram de votar. Como houve 26/100 de eleitores ausentes, o total (percentual) de votantes foi 100/100 – 26/100 = 74/100 dos eleitores. Assim, os eleitores que realmente fizeram opção explícita pela República corresponderam a uma fração (percentual) de 66/100 de 74/100 dos eleitores.



Fazendo o produto obtemos:
66/100 x 74/100 = 4884 /10000 < 49/100 = 4900/10000.



Portanto, a República não obteve a maioria absoluta da preferência dos eleitores no plebiscito! Confesso que, naquele momento, esse resultado me surpreendeu!

Convencidos, eventualmente da relevância de saber encontrar *frações de frações*, porque chamar isso de *multiplicação de frações*? Podemos observar que a preposição de também aparece naturalmente em problemas típicos envolvendo adição de parcelas iguais, apesar de, em geral, não salientarmos a sua presença. Analisemos alguns problemas:

1. Comprei 3 pacotes de 1/2 kg de café no supermercado. Com quanto de café fiquei?

Podemos sobre ele dizer que, ao todo, fiquei com 1/2 kg tomado 3 vezes, ou 3 vezes 1/2 kg (vezes, palavras do português), o que nos dá a adição de parcelas iguais 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2. Mas também podemos enfatizar o de numa resposta como: fiquei com 3 (pacotes) de 1/2 kg, que ao todo nos dá claramente 3/2 = 3 x 1/2.

2. Comprei 3 pacotes de 5 kg de açúcar. Com quanto açúcar fiquei?
Nesse caso também podemos falar: fiquei com 3 (pacotes) de 5 kg (ao invés de 3 vezes 5 kg), o que nos dá, claramente, 5 kg + 5 kg + 5 kg = 15 kg.

Ou seja, os problemas que envolvem a adição de parcelas iguais podem prescindir das palavras 'vezes' na sua releitura visando encontrar a operação a ser montada para resolvê-lo. Seria interessante enfatizar também a palavra 'de' ao trabalhar esse tipo de problema já nas séries iniciais. Tal providência criaria uma familiaridade maior com o tipo de interpretação prática que é possível no campo das frações, evitando a criação de obstáculos à aprendizagem futura dos alunos.

Outro problema muito freqüente é a introdução precipitada do nome e do símbolo da operação, antes mesmo que os alunos experimentem estratégias pessoais para resolver problemas e cheguem a sentir necessidade do emprego de notação simbólica. Essa estratégia, presente na maioria dos livros didáticos e das salas de aula, também pode se constituir em uma dificuldade suplementar para uma aprendizagem significativa. Como a notação usual já está carregada de significações para os alunos, e todas associadas a números naturais, uma barreira pode se formar à compreensão da ampliação do seu uso em outros contextos, deixando assim aberto o caminho para a mera memorização de regras sem sentido. Nesse texto de análise de dificuldades conceituais, não elaboro muitos exemplos de situações-problema possíveis de serem aplicadas em sala de aula, apesar de enfatizar a importância delas. Fica assim como exercício essa importante tarefa.

Passo agora à discussão de um procedimento operatório que me parece mais adequado ao significado 'concreto' da operação de multiplicação de frações que

trabalhamos até aqui. A idéia surgiu-me ao tomar conhecimento de como os antigos gregos compunham razões, inclusive no estudo que fizeram sobre intervalos musicais. Creio ser o procedimento a seguir descrito mais intuitivo e mais indicado para a introdução de uma técnica operatória com frações. O algoritmo usual do "multiplica em cima e em baixo" me parece excessivamente 'mágico' e de mecanização automática, sem sentido e demasiadamente rápida. É fato amplamente reconhecido que esse último algoritmo não é compreendido pela grande maioria dos alunos. Analisemos alguns exemplos iniciais onde se queira encontrar uma fração de outra fração.

1. Diga que fração representa cada uma das referidas abaixo e represente graficamente o raciocínio feito para chegar à resposta. Estabeleça uma generalização para os exemplos dados.
   a) 1/4 de 4/5?
   b) 2/3 de 3/7?
   c) 3/5 de 5/9?
   d) 3/4 de 4/3?
   e) 12/15 de 15/22?

Parece ser fácil ou intuitivo determinar a fração de uma fração se o denominador da primeira for igual ao numerador da segunda, não? Mais difícil é um enunciado que explicite o resultado em uma situação genérica, mesmo que sua justificativa utilize apenas o conceito de fração como relação parte x todo. Se quisermos saber qual fração representa a fração p/q da fração q/d, usando a definição teremos: como a parte com q pedaços do todo que foi dividido em d pedaços equivalentes já está dividida em q pedaços iguais, a fração referida deverá ser formada por p desses mesmos pedaços do referido todo - que foi repartido em d pedaços. Portanto a fração será representada por p/d. E, 'precipitando a regra', podemos escrever: p/q de p/d = p/d ou ainda p/q x p/d = p/d. Essa regra emerge diretamente dos conceitos ou definições e não de 'cortes' meio mágicos, que só fazem sentido se encaramos a fração como uma divisão indicada (em cujo caso fica difícil uma interpretação não estritamente algébrica para a operação de multiplicação). Em todos os casos particulares em que for aplicada ela é praticamente evidente, para que domina o conceito de fração como relação parte x todo. A generalização dela é interiorizada facilmente, prescindindo que seja explicitada uma sistematização como a que fiz acima, sempre que a linguagem nela empregada extrapolar de uma adequação à faixa etária dos alunos, sem prejuízo do rigor.

Se o procedimento descrito ficar bem compreendido nos casos particulares em que eles se aplicam e se a relação de equivalência entre frações também estiver assimilada com significado, não fica difícil generalizar para duas frações quaisquer, a idéia que ele traduz. Basta encontrar frações equivalentes às dadas convenientes, de maneira a transformar o problema proposto em outro equivalente que recaia no caso anterior. Assim por exemplo:

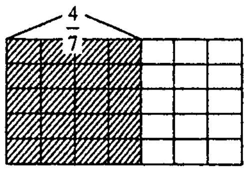
4/5 de 3/8 é a mesma fração que 12/15 de 15/40, já que 4/5 = 12/15 e 3/8 = 15/40. Mas 12/15 de 15/40 é a fração 12/40 = 3/10. Portanto a resposta, em termos de uma fração irredutível é: 4/5 de 3/8 = 12/15 de 15/40, é 12/40 = 3/10 ou 4/5 x 3/8 = 3/10. Observemos que, com esse procedimento, também para a multiplicação deveremos passar por um processo de 'reduzir' as frações de forma que o denominador da primeira fique igual do numerador da segunda. Creio mesmo que, o desenvolvimento desse processo multiplicativo, pode inclusive levar a que os alunos reforcem ou atribuam significado aos nomes com que são designados na aritmética os números naturais que compõem uma fração.

Atribuir significado à regra usual do "multiplica em cima e em baixo" me parece possível, porém mais difícil. Essa regra não necessitaria nem ser introduzida, mas como é muito presente nos livros, convém refletir um pouco sobre ela. Ela talvez possa ser trabalhada em série posterior àquela onde o trabalho multiplicação de frações for iniciado. Por exemplo, pode-se responder, somente com o auxílio de gráficos, sem o conhecimento prévio da mágica da regra acima, às seguintes perguntas, inventando-se situações em que elas compareçam.

Quanto vale:

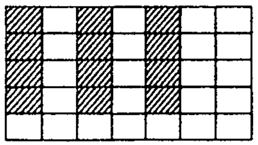
a) 1/5 de 4/7?

Observando que 1/5 de 4/7 cobrem 4 retângulos quando a unidade original é repartida em 35 retângulos de mesma área. Pode se responder que 1/5 de 4/7 é 4/35.



b) 3 de 4/35?

Cada retângulo hachureado representa um pedaço equivalente a 4/35 do todo. Três destes pedaços cobrem 12/35 do mesmo todo, como se pode ver na figura. Portanto a respostas é 3 de 4/45 equivale a 12/45 do todo.



c) 3/5 de 4/7

Sabendo que 3/5 de algo representa 3 partes dentre 5 partes equivalentes em que o referido objeto foi dividido. Então, para resolver esta questão, basta saber o que vale uma de tais partes e a seguir tomá-la 3 vezes. Ou seja, o objeto da questão é o pedaço de 4/7 de um todo hipotético. Assim, se soubermos quanto vale 1/5 de 4/7, posteriormente deveremos triplicar este valor. Mas isso já foi realizado nos itens a) e b), ou seja, podemos dizer que: 3/5 de 4/7 representa 12/35 do todo.

Observe que o raciocínio desenvolvido no parágrafo anterior, baseado no concreto, corresponde à seguinte seqüência de equações:

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=(3\times\frac{1}{5})\times\frac{4}{7}=3\times(\frac{1}{5}\times\frac{4}{7})=3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{35}$$

Parece-me que um convívio inicial com problemas do tipo constante do item **a**, onde a primeira fração tem *numerador* 1 (é unitária), e do tipo do item **b**, onde a primeira fração tem *denominador* 1 (é um número natural), pode sugerir ou induzir naturalmente a estratégia, no caso **a**, de multiplicar denominadores, e no caso **b**, de multiplicar numeradores, para chegar à respostas do problema. No caso geral, que está representado no exemplo **c**, é sempre possível fazer a decomposição do problema em duas etapas, dos tipos **a** e **b**, para obter a resposta. Creio que o encaminhamento por etapas, junto com a compreensão do enunciado do problema, pode facilitar que o aluno chegue à construção do algoritmo usual para a multiplicação de frações.

Gostaria de insistir que somente após este procedimento, baseado em problemas concretos de "procurar fração de fração", é que o símbolo matemático x seja introduzido no lugar de preposição de (para escrever-se fração x fração). A idéia é inverter o sentido da "mágica": escreverei o sinal de vezes (x) entre duas frações até porque, para encontrar um fração de fração, me convenci que necessito usar a multiplicação entre inteiros (numerador x numerador e denominador x denominador) para poder encontrar a fração resultante.

Exercício:

Invente problemas interessantes que recaiam na necessidade de determinar algumas frações. Resolva-os por meio de modelos, geométricos ou não.

- **C3) A Divisão de Frações**

Se a repartição eqüitativa perde tipicamente o sentido entre frações próprias, a idéia de medida da operação de divisão continua válida no campo das frações. Basta que se formule problemas adequadamente. Ficaria estranho perguntar: "quantas vezes 1/3 de uma banana cabe numa metade dela?". Mas o problema pode ser melhor colocado da seguinte maneira: "Quero comer uma metade de banana, mas elas estão na bandeja cortadas em terços. Quantos ou que frações dos pedaços de banana na bandeja devo comer para satisfazer a minha vontade?".

Exercício:

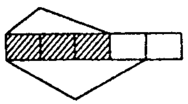
Invente problemas mais interessantes, ou seja, mais vinculados a uma realidade de criança, e que envolvam a idéia da divisão como medida, no universo das frações.

Novamente, uma vez convencidos da utilidade prática de resolver esse tipo de problemas, resta a questão de como chegar nas respostas com *compreensão* da técnica operatória – evitando o simples decorar da mágica do "inverte e multiplica". Aliás, como anteriormente para a multiplicação, que essa mágica usualmente utilizada não é necessária. Uma outra técnica, baseada mais diretamente nos conceitos anteriormente desenvolvidos nos permite achar o resultado de uma divisão sem que seja na forma de um produto. As crianças podem ser levadas a "descobrir" esta técnica, se bem orientadas por problemas ou exemplos significativos. Vejamos alguns. Procuremos as respostas às seguintes perguntas somente com o auxílio de materiais concretos (papel quadriculado, desenhos, lápis de cor, tesouras, ...).

1) Quanto, ou que fração 4/5 cabe em 3/5 (de algo)?

Observe que a pergunta nos solicita, em outras palavras, para medir 3/5 (de um todo inicial) utilizando 4/5 (do mesmo todo) como unidade de medida.

$\frac{3}{5}$



$\frac{4}{5}$

Ora, essa nova unidade ou todo de referência (4/5) já está previamente dividida em 4 partes iguais (os quintos) e somente 3 destas partes serão cobertas pela fração 3/5. Ou seja, são 3 pedaços (que medem 1/5 do todo inicial) entre 4 iguais, que representam a parte de 4/5 que cabe em 3/5. Logo a resposta será:

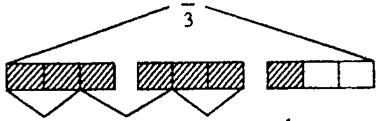
3/4 de 4/5 cabe em 3/5.

Traduzido em símbolos matemáticos tudo isso, obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$$

2) Quanto ou que fração de 2/3 cabe em 7/3?

$\frac{7}{3}$



$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + (\frac{1}{3}$, que é uma metade de $\frac{2}{3})$

Vemos na figura que cabem 3 pedaços de 2/3 e mais 1/2 de 2/3 em 7/3 (do todo inicial). Ou seja, a resposta será:

cabem 3 ½ de 2/3 em 7/3, ou, equivalentemente,

cabem 7/2 de 2/3 em 7/3; ou, em símbolo matemáticos:

$$\frac{7}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{7}{2}$$

Será que foi coincidência que, um caso dos dois exemplos, o resultado deu simplesmente a fração que tem para numerador o numerador do dividendo e cujo denominador é o numerador do divisor? – Não! – O elemento comum no dois problemas é que estamos procurando o quociente entre duas frações com o mesmo denominador. Um denominador comum significa que o todo inicial (ao qual se referem as duas frações do problema) foi dividido em pedaços de mesma medida. Ora, se todos os pedaços são equivalentes e o divisor representa a nova unidade de medida (ou o novo todo) do problema, o número de partes em que ele está dividido será o denominador da resposta, pelo próprio conceito de fração como relação parte x todo. Já o dividendo representa o total a ser recoberto pela nova unidade, ou seja, o número de partes que devo tomar da mesma unidade (dividida em partes iguais) e, portanto, o numerador da

resposta. Novamente, em símbolos matemáticos, o que está escrito em português acima pode ser sintetizado na igualdade:

$$\frac{n}{m} \div \frac{p}{m} = \frac{n}{p} \quad (n, m, p \in \mathcal{N},\ m, p \neq 0)$$

Observação: Vai aqui um conselho. Se você não entendeu o último parágrafo (pelo rolo de todo inicial, nova unidade, partes iguais prá lá e prá cá....) resolva, no concreto, tantos exercícios do tipo de **a** e **b** quantos forem necessários, para que a blá-blá do último parágrafo venha a fazer sentido.

Por exemplo, responda, utilizando papel quadriculado e desenhos:

c) quanto de 5/7 cabe em 3/7?
d) quanto de 3/4 cabe em 7/4?
e) invente outros problemas se for necessário.

Ora, se conseguirmos levar os nossos alunos a elaborar no concreto a conclusão de que quando duas frações têm o mesmo denominador o resultado da divisão entre elas é dado pela igualdade acima, teremos praticamente resolvido o problema da divisão de frações em geral, já que, dadas duas frações, podemos sempre reduzi-las a frações equivalentes com denominadores comuns. Dessa maneira fazemos recair qualquer divisão entre frações no caso estudado inicialmente, como no exemplo:

$$\frac{1}{4} \div \frac{2}{13} = \frac{3}{12} \div \frac{8}{12} = \frac{3}{8}$$

Saliento que não é necessário "inverter e multiplicar" para poder dividir frações, não é mesmo? Ou seja, uma simples retomada do procedimento para encontrar um denominador comum, já tratado para adições e subtrações, nos permite também resolver divisões, desde que o caso da divisão de frações com denominadores iguais tenha ficado bem compreendido. Mais um exemplo:

$$\frac{4}{15} \div \frac{3}{10} = \frac{8}{30} \div \frac{9}{30} = \frac{8}{9}$$

Essa técnica de divisão me parece mais acessível aos alunos, já que parte dos significados das noções de fração e da operação de divisão nesse campo numérico, o que pode facilitar a compreensão ou apropriação significativa dos procedimentos. O entendimento da técnica usual do "inverte e multiplica" depende de um raciocínio algébrico mais sofisticado, envolvendo elementos inversos e o elemento neutro da multiplicação. Parece-me que ela pode ser deixada para um segundo momento, numa fase escolar (e numa idade do aluno) mais avançada, onde a capacidade de abstração e o domínio de raciocínios algébricos estejam mais garantidos.

Referências bibliográficas

Bertoni, N.E., - *Um novo paradigma no ensino aprendizagem das frações*, trabalho apresentado no VIII ENEM, Recife, 2004.

- *Educação e linguagem matemática 4*, Módulo V, vol.2, UNB, Brasília, 2002.

Brasil, MEC/SEF, *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática* (1ª a 4ª e 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental), Brasília, 1996 e 1997.

CENP/SEE/SP, *Proposta Curricular de Matemática para o CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério* (capítulo "números"), São Paulo, 1988.