4.3 EXERCÍCIOS

1–2 Use o gráfico dado de f para encontrar o seguinte:

(a) Os intervalos abertos nos quais f é crescente.

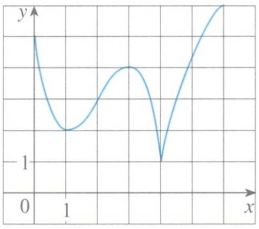
(b) Os intervalos abertos nos quais f é decrescente.

(c) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para cima.

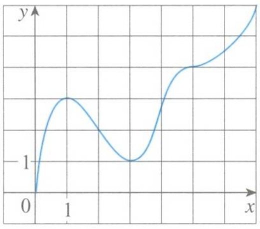
(d) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para baixo.

(e) As coordenadas dos pontos de inflexão.

1.



2.



3. Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função f.

(a) Como você determina onde f é crescente ou decrescente?

(b) Como você determina onde o gráfico de f é côncavo para cima ou para baixo?

(c) Como você localiza os pontos de inflexão?

4. (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.

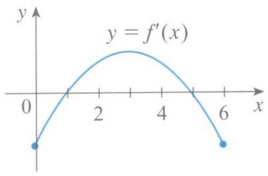
(b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada. Em que circunstância ele é inconclusivo? O que você faz se ele falha?

5–6 O gráfico da *derivada* f' de uma função f está mostrado.

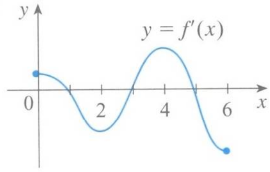
(a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?

(b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?

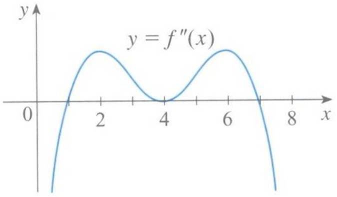
5.



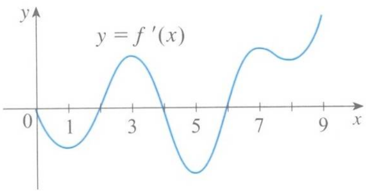
6.



7. O gráfico da segunda derivada f'' de uma função f está mostrado. Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão de f. Justifique sua resposta.



8. O gráfico da primeira derivada f' de uma função f está mostrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo? Explique.
(b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local? Explique.
(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo? Explique.
(d) Quais são as coordenadas x dos pontos de inflexão de f? Por quê?



9–18
(a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximo e mínimo local de f.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

9. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

10. $f(x) = 5 - 3x^2 + x^3$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

19–21 Encontre os valores máximo e mínimo locais de f usando ambos os Testes das Primeira e Segunda Derivadas. Qual método você prefere?

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

21. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

22. (a) Encontre os números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) O que o Teste da Segunda Derivada mostra para você sobre o comportamento de f nesses números críticos?
(c) O que mostra o Teste da Primeira Derivada?

23. Suponha que f'' seja contínua em $(-\infty, \infty)$.
(a) Se $f'(2) = 0$ e $f''(2) = -5$, o que se pode afirmar sobre f?
(b) Se $f'(6) = 0$ e $f''(6) = 0$, o que se pode afirmar sobre f?

24–29 Esboce o gráfico de uma função que satisfaça todas as condições dadas.

24. $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1$, assíntota vertical $x = 1$,
$f''(x) > 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$, $f''(x) < 0$ se $1 < x < 3$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ ou $x > 4$,
$f''(x) > 0$ se $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ se $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ se $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ se $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ se $-2 < x < 0$ e ponto de inflexão em (0,1)

27. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $f''(x) > 0$ se $|x| \neq 2$

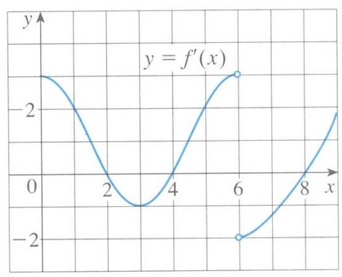
28. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(2) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ se $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ se $x > 3$

29. $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.

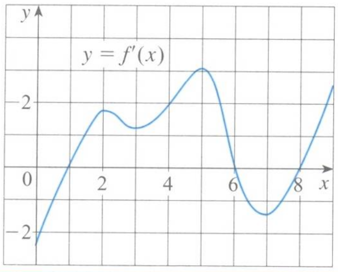
30. Suponha que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ e $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.
(a) Esboce um gráfico possível de f.
(b) Quantas soluções a equação $f(x) = 0$ tem? Por quê?
(c) É possível que $f'(2) = \frac{1}{3}$? Por quê?

31–32 O gráfico da derivada f' de uma função contínua f está ilustrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local?
(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo?
(d) Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão.
(e) Supondo que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f.

31.



32.



33–44

(a) Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

(b) Encontre os valores máximos ou mínimos locais.

(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

(d) Use as informações das partes (a)–(c) para esboçar o gráfico. Verifique seu trabalho com uma ferramenta gráfica, se você tiver uma.

33. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

34. $f(x) = 2 + 3x - x^3$

35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

36. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$

38. $h(x) = (x^2 - 1)^3$

39. $A(x) = x\sqrt{x+3}$

40. $B(x) = 3x^{2/3} - x$

41. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$

42. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

44. $f(t) = t + \cos t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

45–52

(a) Encontre as assíntotas vertical e horizontal.

(b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.

(c) Encontre os valores máximos e mínimos locais.

(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

(e) Use a informação das partes (a)–(d) para esboçar o gráfico de f.

45. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$

46. $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = x\,\text{tg}\,x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

49. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

50. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

51. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$

52. $f(x) = e^{\text{arctg}\,x}$

53. Suponha que a derivada da função f seja $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. Em qual intervalo f está crescendo?

54. Use os métodos desta seção para esboçar a curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, onde a é uma constante positiva. O que os membros desta família de curvas têm em comum? Como eles diferem entre si?

55–56

(a) Use um gráfico de f para estimar os valores máximo e mínimo. Então, encontre os valores exatos.

(b) Estime o valor de x em que f cresce mais rapidamente. Então, encontre o valor exato.

55. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

56. $f(x) = x^2 e^{-x}$

57–58

(a) Use um gráfico de f para estimar aproximadamente os intervalos da concavidade e as coordenadas dos pontos de inflexão.

(b) Use um gráfico de f'' para dar uma estimativa melhor.

57. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

58. $f(x) = x^3(x - 2)^4$

SCA **59–60** Estime os intervalos da concavidade com precisão de uma casa decimal usando um sistema de computação algébrica para calcular e fazer o gráfico de f'.

59. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

60. $f(x) = \dfrac{x^2\,\text{tg}^{-1}x}{1 + x^3}$

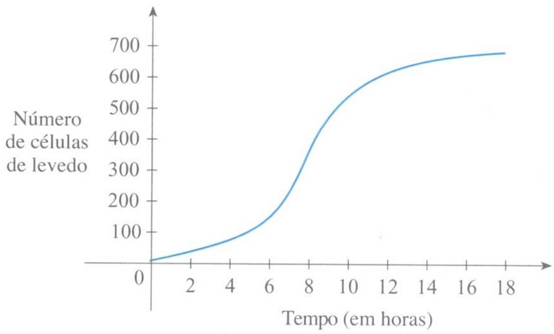
61. É dado o seguinte gráfico de uma população de células de levedo em uma nova cultura de laboratório em função do tempo.

(a) Descreva como varia a taxa de crescimento populacional.

(b) Quanto a taxa é mais alta?

(c) Em quais intervalos a função população é côncava para cima ou para baixo?

(d) Estime as coordenadas do ponto de inflexão.



62. Seja $f(t)$ a temperatura no instante t onde você mora e suponha que no instante $t = 3$ você se sinta desconfortavelmente quente. Como você se sente em relação às informações dadas em cada caso?

(a) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$ (b) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = -4$

(c) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = 4$ (d) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = -4$

63. Seja $h(t)$ uma medida do conhecimento adquirido por você estudando t horas para um teste. O que você acredita ser maior, $K(8) - K(7)$ ou $K(3) - K(2)$? O gráfico de K é côncavo para cima ou para baixo? Por quê?

64. A caneca mostrada na figura está sendo enchida com café a uma taxa constante (medida em volume por unidade de tempo). Esboce um gráfico da profundidade do café na caneca como uma função do tempo. Forneça uma explicação para o formato do gráfico em termos de concavidade. Qual o significado do ponto de inflexão?

65. Uma *curva de resposta à droga* descreve o nível de medicamento na corrente sanguínea depois de uma droga ser administrada. Uma função onda $S(t) = At^p e^{-kt}$ é usada frequentemente para modelar a curva de resposta, refletindo uma oscilação inicial acentuada no nível da droga e então um declínio gradual. Se, para uma droga particular, $A = 0{,}01$, $p = 4$, $k = 0{,}07$ e t for medido em minutos, estime o tempo correspondente aos pontos de inflexão e explique seu significado. Se você tiver uma ferramenta gráfica, use-a para traçar a curva de resposta à droga.

66. A família das curvas em forma de sino

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

ocorre em probabilidade e estatística, nas quais ela é chamada *função densidade normal*. A constante μ é denominada *média*, e a constante positiva σ é conhecida como *desvio-padrão*. Por simplicidade, mudamos a escala da função de forma a remover o fator $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ e vamos analisar o caso especial onde $\mu = 0$. Logo, estudamos a função

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encontre a assíntota, o valor máximo e os pontos de inflexão de f.

(b) Que papel desempenha σ no formato da curva?

(c) Ilustre, fazendo o gráfico de quatro membros dessa família sobre a mesma tela.

67. Encontre uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenha um valor máximo local 3 em -2 e um valor mínimo local 0 em 1.

68. Para quais valores dos números a e b a função

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tem o valor máximo $f(2) = 1$?

69. Mostre que a curva $y = (1 + x)/(1 + x^2)$ tem três pontos de inflexão e todos ficam sobre uma mesma reta.

70. Mostre que as curvas $y = e^{-x}$ e $y = -e^{-x}$ tocam a curva $y = e^{-x}$ sen x em seu ponto de inflexão.

71. Suponha que f seja derivável em um intervalo I e $f'(x) > 0$ para todos os números x em I, exceto para um único número c. Demonstre que f é uma função crescente em todo o intervalo.

72–74 Suponha que todas as funções sejam duas vezes deriváveis e que as segundas derivadas nunca sejam nulas.

72. (a) Se f e g forem côncavas para cima em I, mostre que $f + g$ é côncava para cima em I.

(b) Se f for positiva e côncava para cima em I, mostre que a função $g(x) = [f(x)]^2$ é côncava para cima em I.

73. (a) Se f e g forem funções positivas, crescentes e côncavas para cima em I, mostre que a função produto fg é côncava para cima em I.

(b) Mostre que a parte (a) permanece verdadeira mesmo que f e g sejam ambas decrescentes.

(c) Suponha que f seja crescente e g, decrescente. Mostre, dando três exemplos, que fg pode ser côncava para cima, côncava para baixo ou linear. Por que os argumentos usados nas partes (a) e (b) não podem ser usados neste caso?

74. Suponha que f e g sejam ambas côncavas para cima em $(-\infty, \infty)$. Sob que condições em f a função composta $h(x) = f(g(x))$ será côncava para cima?

75. Mostre que tg $x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugestão*: Mostre que $f(x) = \text{tg } x - x$ é crescente em $(0, \pi/2)$.]

76. (a) Mostre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.

(b) Deduza que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.

(c) Use a indução matemática para demonstrar que para $x \geqslant 0$ e qualquer inteiro positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

77. Mostre que uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) tem sempre exatamente um ponto de inflexão. Se seu gráfico possui três intersecções com o eixo x, x_1, x_2 e x_3, mostre que a coordenada x do ponto de inflexão é $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

78. Para quais valores de c o polinômio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tem dois pontos de inflexão? E um ponto de inflexão? E nenhum? Ilustre, fazendo o gráfico de P para vários valores de c. Como o gráfico varia quando c decresce?

79. Demonstre que se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f e f'' existir em um intervalo aberto contendo c, então $f''(c) = 0$. [*Sugestão*: Aplique o Teste da Primeira Derivada e o Teorema de Fermat à função $g = f'$.]

80. Mostre que se $f(x) = x^4$, então $f''(0) = 0$, mas $(0, 0)$ não é um ponto de inflexão do gráfico de f.

81. Mostre que a função $g(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$, mas $g''(0)$ não existe.

82. Suponha que f''' seja contínua e $f'(c) = f''(c) = 0$, mas $f'''(c) > 0$. A função f tem um mínimo ou máximo local em c? A função f apresenta um ponto de inflexão em c?

83. Os três casos no Teste da Primeira Derivada cobrem as situações encontradas usualmente, mas não esgotam todas as possibilidades. Considere as função f, g e h cujos valores em 0 são todos 0 e, para $x \neq 0$

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad g(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4\left(-2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

(a) Mostre que 0 é um número crítico de todas as três funções, mas suas derivadas mudam de sinal infinitas vezes em ambos os lados de 0.

(b) Mostre que f não tem nem um máximo nem um mínimo local em 0, que g tem um mínimo local e que h tem um máximo local.