4.1 EXERCÍCIOS

1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.

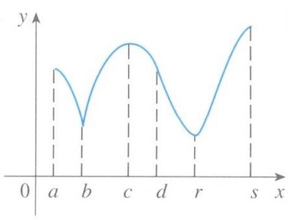
2. Suponha que f seja uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$.

(a) Que teorema garante a existência de valores máximo e mínimo absolutos para f?

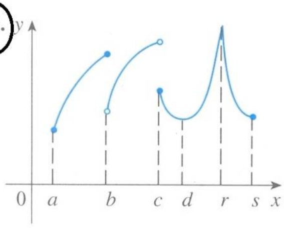
(b) Quais as etapas que você deve seguir para encontrar esses valores máximo e mínimo?

3–4 Para cada um dos números a, b, c, d, r e s, diga se a função cujo gráfico é dado tem um máximo ou mínimo absoluto, um máximo ou mínimo local, ou nem máximo, nem mínimo.

3.

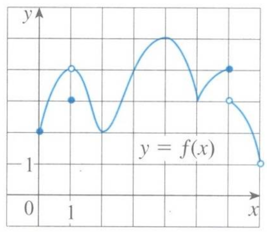


4.

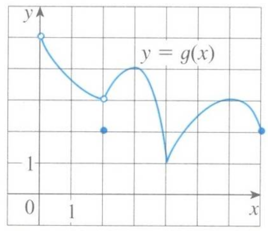


5–6 Use o gráfico para dizer quais os valores máximos e mínimos locais e absolutos da função.

5.



6.



7–10 Esboce o gráfico de uma função f que seja contínua em $[1, 5]$ e tenha as propriedades dadas.

7. Máximo absoluto em 3, mínimo absoluto em 2, mínimo local em 4.

8. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 1, máximo local em 2 e mínimo local em 4.

9. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 2, máximo local em 3 e mínimo local em 2 e 4.

10. f não tem máximos ou mínimos locais, mas 2 e 4 são números críticos.

11. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja derivável em 2.

(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja contínua, mas não derivável em 2.

(c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja contínua em 2.

12. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha máximo absoluto, mas não tenha máximo local.

(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo local, mas não tenha máximo absoluto.

13. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.

(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontínua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

14. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha dois máximos locais e um mínimo local, mas nenhum mínimo absoluto.

(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha três mínimos locais, dois máximos locais e sete números críticos.

15–28 Esboce o gráfico de f à mão e use seu esboço para encontrar os valores máximos e mínimos locais e absolutos de f. (Use os gráficos e as transformações das Seções 1.2 e 1.3.)

15. $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geqslant 1$

16. $f(x) = 3 - 2x, \quad x \leqslant 5$

17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$

18. $f(x) = x^2, \quad 0 < x \leqslant 2$

19. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x < 2$

20. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

21. $f(x) = x^2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 2$

22. $f(x) = 1 + (x+1)^2, \quad -2 \leqslant x < 5$

23. $f(t) = 1/t, \quad 0 < t < 1$

24. $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta, \quad -\pi/4 \leqslant \theta < \pi/2$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 4 & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

29–44 Encontre os números críticos da função.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

32. $f(x) = x^3 + x^2 + x$

33. $s(t) = 3t^4 + 4t^3 - 6t^2$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $g(\theta) = 4\theta - \operatorname{tg}\theta$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2} \ln x$

45–46 É dada uma fórmula para a derivada de uma função. Quantos números críticos ela tem?

45. $f'(x) = 5e^{-0{,}1|x|} \operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100 \cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47–62 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = 18x + 15x^2 - 4x^3, \quad [-3, 4]$

51. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2, \quad [-3, 2]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

54. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad [-4, 4]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}\,(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

63. Se a e b são números positivos, ache o valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

64. Use um gráfico para estimar os números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ com precisão de uma casa decimal.

65–68

(a) Use um gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função com precisão de duas casas decimais.

(b) Use o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

66. $f(x) = e^{x^3 - x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leqslant x \leqslant 0$

69. Entre 0 ºC e 30 ºC, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula

$$V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

70. Um objeto com massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda presa ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde μ é uma constante positiva chamada *coeficiente de atrito* e $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Mostre que F é minimizada quando $\operatorname{tg} \theta = \mu$.

71. Um modelo para o preço médio norte-americano para o açúcar refinado entre, 1993 e 2003, é dado pela função

$$S(t) = -0{,}00003237t^5 + 0{,}0009037t^4 - 0{,}008956t^3 + 0{,}03629t^2 - 0{,}04458t + 0{,}4074$$

onde t é medido em anos a partir de agosto de 1993. Estime os instantes nos quais o açúcar esteve mais barato e mais caro entre 1993 e 2003.

72. Em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49. A tabela a seguir fornece os dados da velocidade do ônibus entre o lançamento e a ejeção dos foguetes auxiliares.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56,4
Fim da manobra de inclinação	15	97,2
Regulador de combustível a 89%	20	136,2
Regulador de combustível a 67%	32	226,2
Regulador de combustível a 104%	59	403,9
Pressão dinâmica máxima	62	440,4
Separação do foguete auxiliar	125	1 265,2

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar o polinômio cúbico que melhor modele a velocidade do ônibus para o intervalo de tempo $t \in [0, 125]$. Faça então o gráfico desse polinômio.

(b) Encontre um modelo para a aceleração do ônibus e use-o para estimar os valores máximo e mínimo da aceleração durante os primeiros 125 segundos.

73. Quando um objeto estranho se aloja na traqueia, forçando uma pessoa a tossir, o diafragma empurra-o para cima, causando um aumento na pressão dos pulmões. Isso é acompanhado por uma contração da traqueia, fazendo um canal mais estreito por onde o ar expelido escoe. Para uma dada quantidade de ar escapar em um tempo fixo, é preciso que ele se mova mais rápido através do tubo mais estreito do que no mais largo. Quanto maior for a velocidade da corrente de ar, maior a força sobre o objeto estranho. O uso de raios X mostra que o raio do tubo circular da traqueia se contrai para cerca de 2/3 de seu raio normal durante a tosse. De acordo com o modelo matemático para a tosse, a velocidade v está relacionada ao raio r da traqueia pela equação.

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

em que k é uma constante e r_0, o raio normal da traqueia. A restrição sobre r deve-se ao fato de que as paredes da traqueia endurecem sob pressão, evitando uma contração maior que $\frac{1}{2}r_0$ (de outra forma, a pessoa ficaria sufocada).

(a) Determine o valor de r no intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ no qual v tenha um máximo absoluto. Como isso se compara com a evidência experimental?

(b) Qual é o valor máximo absoluto de v no intervalo?

(c) Esboce o gráfico de v no intervalo $[0, r_0]$.

74. Mostre que 5 é um número crítico da função

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

mas que g não tem um valor extremo local em 5.

75. Demonstre que a função

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

não tem nem máximos nem mínimos locais.

76. Se f tiver um valor mínimo em c, mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c.

77. Demonstre o Teorema de Fermat para o caso no qual f tenha um mínimo local em c.

78. Uma função cúbica é um polinômio de grau três; isto é, tem a forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que $a \neq 0$.

(a) Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número(s) crítico(s). Dê exemplos e esboços que ilustrem essas três possibilidades.

(b) Quantos valores extremos locais uma função cúbica pode ter?

4.2 EXERCÍCIOS

1–4 Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1, \quad [0, 4]$

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5, \quad [0, 2]$

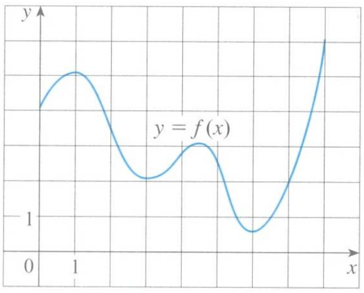
3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$

4. $f(x) = \cos 2x, \quad [\pi/8, 7\pi/8]$

5. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

6. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x$. Mostre que $f(0) = f(\pi)$, mas não existe um número c em $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

7. Use o gráfico de f para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[0, 8]$.



8. Use o gráfico de f dado no Exercício 7 para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[1, 7]$.

9. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x + 4/x$ na janela retangular $[0, 10]$ por $[0, 10]$.
(b) Faça o gráfico da reta secante que passa pelos pontos $(1, 5)$ e $(8, 8{,}5)$ na mesma tela que f.
(c) Encontre o número c que satisfaça à conclusão do Teorema do Valor Médio para essa função f e o intervalo $[1, 8]$. Então, faça o gráfico da reta tangente no ponto $(c, f(c))$ e observe que ela é paralela à reta secante.

10. (a) Na janela retangular $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$, faça o gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x$ e de sua reta secante que passa pelos pontos $(-2, -4)$ e $(2, 4)$. Use o gráfico para estimar as coordenadas x dos pontos onde a reta tangente é paralela à reta secante.
(b) Encontre os valores exatos dos números c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[-2, 2]$ e compare com sua resposta da parte (a).

11–14 Verifique que a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

11. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad [-1, 1]$

12. $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}, \quad [1, 4]$

15. Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

16. Seja $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Mostre que não existe um valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

17. Mostre que a equação $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

18. Mostre que a equação $2x - 1 - \operatorname{sen} x = 0$ tem exatamente uma raiz real.

19. Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.

20. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

21. (a) Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.
(b) Mostre que um polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais.

22. (a) Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raízes. Mostre que f' tem pelo menos uma raiz.
(b) Suponha que f seja duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e tenha três raízes. Mostre que f'' tem pelo menos uma raiz real.
(c) Você pode generalizar os itens (a) e (b)?

23. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geq 2$ para $1 \leq x \leq 4$, quão pequeno pode ser $f(4)$?

24. Suponha que $3 \leq f'(x) \leq 5$ para todo x. Mostre que $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$.

25. Existe uma função f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ e $f'(x) \leq 2$ para todo x?

26. Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Suponha também que $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Demonstre que $f(b) < g(b)$. [*Sugestão*: Aplique o Teorema do Valor Médio para a função $h = f - g$.]

27. Mostre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$.

28. Suponha que f seja uma função ímpar e derivável em toda a parte. Demonstre que para todo o número positivo b existe um número c em $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Use o Teorema do Valor Médio para demonstrar a desigualdade

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para todo } a \text{ e } b$$

30. Se $f'(x) = c$ (c uma constante) para todo x, use o Corolário 7 para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguma constante d.

31. Seja $f(x) = 1/x$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(x) = g'(x)$ para todo x em seus domínios. Podemos concluir a partir do Corolário 7 que $f - g$ é constante?

32. Use o método do Exemplo 6 para demonstrar a identidade

$$2 \operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geqslant 0$$

33. Demonstre a identidade

$$\operatorname{arcsen} \frac{x - 1}{x + 1} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. Às 2 horas da tarde o velocímetro de um carro mostrava 50 km/h, e às 2h10 mostrava 65 km/h. Mostre que em algum instante entre 2h e 2h10 a aceleração era exatamente 90 km/h^2.

35. Dois corredores iniciaram uma corrida no mesmo instante e terminaram empatados. Demonstre que em algum instante durante a corrida eles tiveram a mesma velocidade. [*Sugestão*: Considere $f(t) = g(t) - h(t)$, em que g e h são as funções posição dos dois corredores.]

36. Um número a é chamado **ponto fixo** de uma função f se $f(a) = a$. Demonstre que se $f'(x) \neq 1$ para todo número real x, então f tem no máximo um ponto fixo.