2.2 EXERCÍCIOS

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

Nesta situação, é possível que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

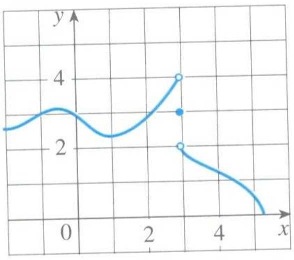
3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

(a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

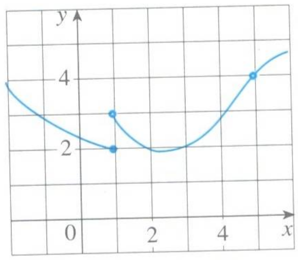
(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



5. Use o gráfico dado da função f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 5} f(x)$ (e) $f(5)$



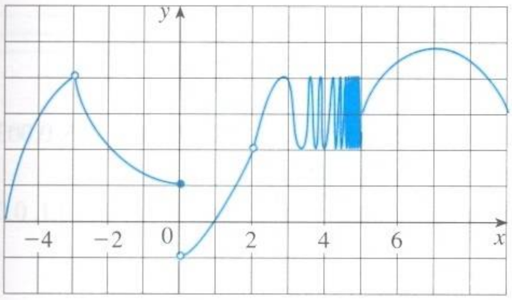
6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$

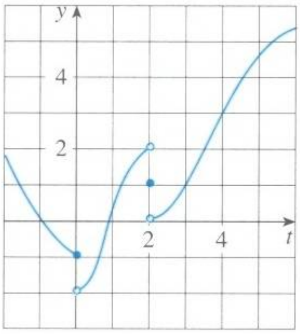


7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t \to 4} g(t)$

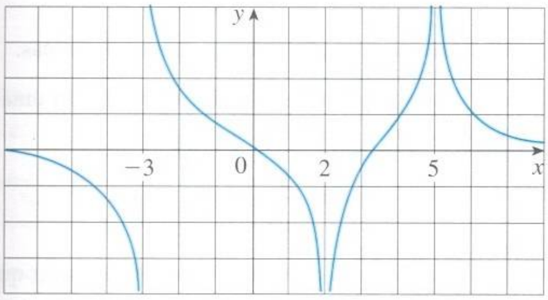


8. Para a função R cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x \to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x \to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x \to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x \to -3^+} R(x)$

(e) As equações das assíntotas verticais.

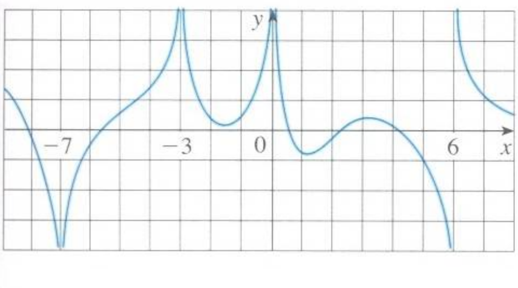


9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x \to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \to 6^+} f(x)$

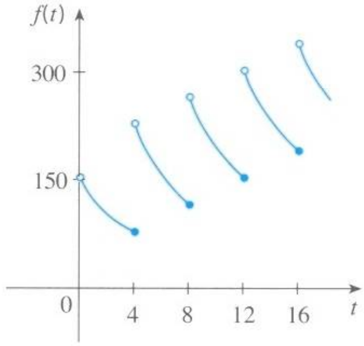
(f) As equações das assíntotas verticais.



10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. (Posteriormente poderemos calcular a dosagem e intervalos de tempo que garantam que a concentração da droga não atinja níveis perigosos.) Encontre

$$\lim_{t \to 12^-} f(t) \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.



11. Use o gráfico da função $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

12. Esboce o gráfico da função a seguir e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x \to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

13–16 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça todas as condições dadas.

13. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -2$, $f(1) = 2$,

14. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$,
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(0)$ não está definida

15. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -2} f(x) = 2$,
$f(3) = 3$, $f(-2) = 1$

16. $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -3$,
$f(1) = 1$, $f(4) = -1$

17–20 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

17. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x = 2{,}5, 2{,}1, 2{,}05, 2{,}01, 2{,}005, 2{,}001,$

$1{,}9, 1{,}95, 1{,}99, 1{,}995, 1{,}999$

18. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,

$x = 0, -0{,}5\ -0{,}9, -0{,}95, -0{,}99, -0{,}999, -2, -1{,}5, -1{,}1, -1{,}01, -1{,}001$

19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $x = \pm 1, \pm 0{,}5, \pm 0{,}1, \pm 0{,}05, \pm 0{,}01$

20. $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x + x^2)$, $x = 1, 0{,}5, 0{,}1, 0{,}05, 0{,}01, 0{,}005, 0{,}001$

21–24 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu resultado.

21 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

22. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$

23. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

24. $\lim_{x \to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

25–32 Determine o limite infinito.

25. $\lim_{x \to 5^+} \dfrac{6}{x - 5}$

26. $\lim_{x \to 5^-} \dfrac{6}{x - 5}$

27. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2 - x}{(x - 1)^2}$

28. $\lim_{x \to 5^-} \dfrac{e^x}{(x - 5)^3}$

29. $\lim_{x \to -2^+} \dfrac{x - 1}{x^2(x + 2)}$

30. $\lim_{x \to \pi^-} \operatorname{cossec} x$

31. $\lim_{x \to (-\pi/2)^-} \sec x$

32. $\lim_{x \to 5^+} \ln(x - 5)$

33. Determine $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ e $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$

(a) calculando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que tendem a 1 pela esquerda e direita,

(b) raciocinando como no Exemplo 9, e

(c) a partir do gráfico de f.

34. (a) Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

(b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

35. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.

36. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que tendam a 0.

37. (a) Calcule a função $f(x) = x^2 - (2^x/1\,000)$ para $x = 1$, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2, 0,1 e 0,05 e faça uma conjectura sobre o valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1\,000} \right)$$

(b) Calcule $f(x)$ para $x = 0{,}04$, 0,02, 0,01, 0,005, 0,003 e 0,001. Faça uma nova conjectura.

38. (a) Calcule $h(x) = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ para $x = 1$, 0,5, 0,1, 0,05, 0,01 e 0,005.

(b) Conjecture qual o valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.

(c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir valor 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique por que você acaba obtendo o valor 0. (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)

(d) Faça o gráfico da função h na janela retangular $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê então um *zoom* na direção do ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0. Continue dando *zoom* até observar distorções no gráfico de h. Compare com os resultados da parte (c).

39. Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ do Exemplo 4 na janela retangular $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Então dê um *zoom* em direção à origem diversas vezes. Comente o comportamento dessa função.

40. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

em que m_0 é a massa da partícula em repouso e c, a velocidade da luz. O que acontece se $v \to c^-$?

41. Use um gráfico para estimar as equações de todas as assíntotas verticais da curva

$$y = \operatorname{tg}(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Encontre, então, as equações exatas dessas assíntotas.

42. (a) Use evidências numéricas e gráficas para fazer uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) A que distância de 1 deverá estar x para garantir que a função da parte (a) esteja a uma distância de 0,5 de seu limite?

2.3 EXERCÍCIOS

1. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

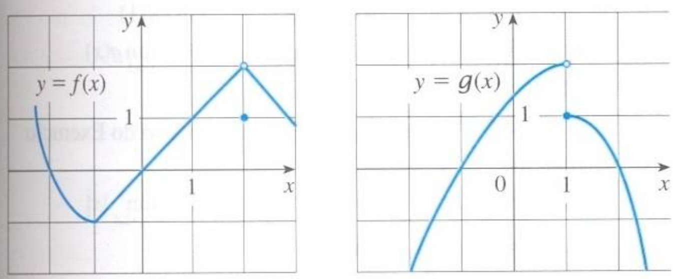
encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista o limite, explique por quê.



(a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2}[x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x\to 1}\sqrt{3 + f(x)}$

3–9 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

3. $\lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3)$

4. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2+4x-3}$

5. $\lim_{x\to 8}(1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

6. $\lim_{t\to -1}(t^2+1)^3(t+3)^5$

7. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)^3$

8. $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4+3u+6}$

9. $\lim_{x\to 4^-}\sqrt{16-x^2}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2+x-6}{x-2} = x+3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+3)$$

está correta.

11–30 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

12. $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

13. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+6}{x-2}$

14. $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

15. $\lim_{t\to -3}\dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

16. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

17. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(4+h)^2-16}{h}$

18. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

19. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+8}$

20. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

21. $\lim_{t\to 9}\dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

22. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

23. $\lim_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

24. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

25. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{x}}{4+x}$

26. $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t}\right)$

27. $\lim_{x\to 9} \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

28. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)$

30. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

31. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

fazendo o gráfico da função $f(x) = x/(\sqrt{1+3x}-1)$.

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e conjecture qual será o valor do limite.

(c) Use as Propriedades dos Limites para mostrar que sua conjectura está correta.

32. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ com duas casas decimais.

(b) Utilize uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Propriedades dos Limites para encontrar o valor exato do limite.

33. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x\to 0}(x^2\cos 20\pi x) = 0$. Ilustre, fazendo os gráficos, na mesma tela, das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2\cos 20\pi x$ e $h(x) = x^2$.

34. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0$$

Ilustre, fazendo os gráficos na mesma tela, de f, g e h (como no Teorema do Confronto).

35. Se $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encontre $\lim_{x\to 4} f(x)$.

36. Se $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para todo x, encontre $\lim_{x\to 1} g(x)$.

37. Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^4\cos\dfrac{2}{x} = 0$.

38. Demonstre que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

39–44 Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

39. $\lim_{x\to 3}(2x + |x-3|)$

40. $\lim_{x\to -6} \dfrac{2x+12}{|x+6|}$

41. $\lim_{x\to 0{,}5^-} \dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

42. $\lim_{x\to -2} \dfrac{2-|x|}{2+x}$

43. $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

44. $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

45. A *função sinal*, denotada por sgn, é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.

(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir.

(i) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x$

(iii) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

46. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

(b) Existe $\lim_{x\to 2} f(x)$?

(c) Esboce o gráfico de f.

47. Seja $F(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

(a) Encontre

(i) $\lim_{x\to 1^+} F(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1^-} F(x)$

(b) Existe $\lim_{x\to 1} F(x)$?

(c) Esboce o gráfico de F.

48. Seja

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Calcule, se existirem, os limites.

(i) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2} g(x)$

(b) Esboce o gráfico de g.

49. (a) Se o símbolo $[\![\ ]\!]$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule

(i) $\lim_{x\to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x\to -2{,}4} [\![x]\!]$

(b) Se n for um inteiro, calcule

(i) $\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$

(c) Para quais valores de a o $\lim_{x\to a} [\![x]\!]$ existe

50. Seja $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Calcule cada limite, se existir

(i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to (\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to \pi/2} f(x)$

(c) Para quais valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$?

51. Se $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, mostre que existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, mas que não é igual a $f(2)$.

52. Na Teoria da Relatividade, a Fórmula da Contração de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto no repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

53. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

54. Se r for uma função racional, use o Exercício 53 para mostrar que $\lim_{x \to a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r.

55. Se $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encontre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

56. Se $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

57. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

58. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \to a} f(x)$ nem $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

59. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \to a} f(x)$ nem $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

60. Calcule $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

61. Existe um número a tal que

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.

62. A figura mostra um círculo fixo C_1 de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e um círculo C_2, a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de intersecção superior dos dois círculos, e R é o ponto de intersecção da reta PQ com o eixo x. O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, quando $r \to 0^+$?