1.6 EXERCÍCIOS

1. (a) O que é uma função injetora?
(b) A partir do gráfico, como dizer se uma função é injetora?

2. (a) Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Como é definida a função inversa f^{-1}? Qual o domínio de f^{-1}? Qual a imagem de f^{-1}?
(b) Se for dada uma fórmula para f, como você encontrará uma fórmula para f^{-1}?
(c) Se for dado o gráfico de f, como você encontrará o gráfico de f^{-1}?

3–14 Uma função f é dada por uma tabela de valores, um gráfico, uma fórmula ou por meio de descrição verbal. Determine se f é injetora.

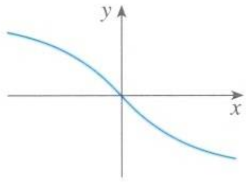
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,5	2,0	3,6	5,3	2,8	2,0

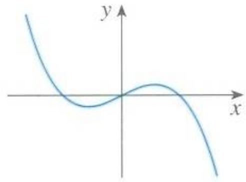
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

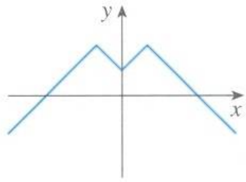
5.



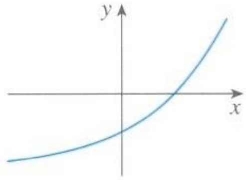
6.



7.



8.



9. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$

10. $f(x) = 1 + 4x - x^2$

11. $g(x) = |x|$

12. $g(x) = \sqrt{x}$

13. $f(t)$ é a altura de uma bola t segundos após ser chutada.

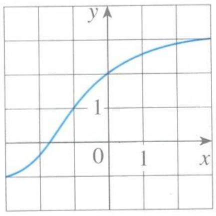
14. $f(t)$ é sua altura com t anos de idade.

15. Se f for uma função injetora tal que $f(2) = 9$, quanto é $f^{-1}(9)$?

16. Se $f(x) = 3 + x^2 + \operatorname{tg}(\pi x/2)$, onde $-1 < x < 1$.
(a) Encontre $f^{-1}(3)$.
(b) Encontre $f(f^{-1}(5))$.

17. Se $g(x) = 3 + x + e^x$, ache $g^{-1}(4)$.

18. É dado o gráfico de f.
(a) Por que f é injetora?
(b) Determine o domínio e a imagem de f^{-1}.
(c) Qual o valor de $f^{-1}(2)$?
(d) Obtenha uma estimativa para o valor de $f^{-1}(0)$



19. A fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde $F \geqslant -459{,}67$, expressa a temperatura C em graus Celsius como uma função da temperatura F em graus Fahrenheit. Encontre uma fórmula para a função inversa e interprete-a. Qual o domínio da função inversa?

20. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula no repouso e c é a velocidade da luz no vácuo. Encontre a função inversa de f e explique seu significado.

21–26 Encontre uma fórmula para a função inversa.

21. $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{x^3}$ **24.** $y = 2x^3 + 3$

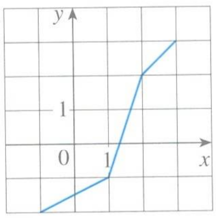
25. $y = \ln(x + 3)$ **26.** $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

27–28 Encontre uma fórmula explícita para f^{-1} e use-a para fazer na mesma tela os gráficos de f^{-1}, f e da reta $y = x$. Para verificar seu trabalho, veja se seus gráficos de f e f^{-1} são reflexões em torno da reta.

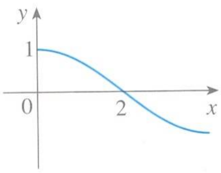
27. $f(x) = x^4 + 1, x \geqslant 0$ **28.** $f(x) = 2 - e^x$

29–30 Use o gráfico dado de f para esboçar o de f^{-1}.

29.



30.



31. (a) Como está definida a função logarítmica $y = \log_a x$?
(b) Qual o domínio dessa função?
(c) Qual a imagem dessa função?
(d) Esboce a forma geral do gráfico da função $y = \log_a x$ se $a > 1$.

32. (a) O que é o logaritmo natural?
(b) O que é o logaritmo comum?
(c) Esboce os gráficos, no mesmo sistema de coordenadas, das funções logaritmo natural e exponencial natural.

33–36 Encontre o valor exato de cada expressão.

33. (a) $\log_5 125$ (b) $\log_3 \frac{1}{27}$

34. (a) $\ln(1/e)$ (b) $\log_{10} \sqrt{10}$

35. (a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
(b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

36. (a) $e^{-2 \ln 5}$ (b) $\ln(\ln e^{e^{10}})$

37–38 Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

37. $\ln 5 + 5 \ln 3$

38. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2 \ln c$

39. $\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \ln x - \ln \operatorname{sen} x$

40. Use a Fórmula 10 para calcular cada logaritmo, correto até a sexta casa decimal.
(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8{,}4$

41–42 Use a Fórmula 10 para fazer o gráfico das funções dadas em uma mesma tela. Como se relacionam esses gráficos?

41. $y = \log_{1,5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$

42. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

43. Suponha que o gráfico de $y = \log_2 x$ seja feito sobre uma malha coordenada onde a unidade de comprimento seja 1 centímetro. Quantos quilômetros à direita da origem devemos percorrer antes de a altura da curva atingir 1 m?

44. Compare as funções $f(x) = x^{0,1}$ e $g(x) = \ln x$ traçando os gráficos de f e g em várias janelas retangulares. Quando finalmente o gráfico de f ultrapassa o de g?

45–46 Faça o esboço do gráfico de cada função. Não use a calculadora. Use somente os gráficos dados nas Figuras 12 e 13 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

45. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

46. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln |x|$

47–50 Resolva cada equação em x.

47. (a) $2 \ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

48. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

49. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

50. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$

51–52 Resolva as equações em x.

51. (a) $e^x < 10$ (b) $\ln x > -1$

52. (a) $2 < \ln x < 9$ (b) $e^{2-3x} > 4$

53–54 Determine (a) o domínio de f e (b) f^{-1} e seu domínio.

53. $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$ **54.** $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

SCA **55.** Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ e explique por que ela é injetora. Use então um sistema de computação algébrica (SCA) para encontrar uma expressão explícita para $f^{-1}(x)$. (Seu SCA vai produzir três expressões possíveis. Explique por que duas delas são irrelevantes neste contexto.)

SCA **56.** (a) Se $g(x) = x^6 + x^4, x \geqslant 0$, use um sistema de computação algébrica para encontrar uma expressão para $g^{-1}(x)$.
(b) Use a expressão da parte (a) para fazer na mesma tela um gráfico de $y = g(x)$, $y = x$ e $y = g^{-1}(x)$.

57. Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ (veja o Exercício 25 na Seção 1.5).
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quando a população atingirá 50 000 bactérias?

58. Após acionado o *flash* de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do *flash*, que armazena uma carga elétrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(A capacidade máxima de carga é Q_0, e t é medida em segundos.)
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quanto tempo levará para recarregar o capacitor 90% da capacidade, se $a = 2$?

59–64 Encontre o valor exato de cada expressão.

59. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

60. (a) $\operatorname{tg}^{-1}(1/\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

61. (a) arctg 1 (b) $\operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{2})$

62. (a) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

63. (a) tg(arctg 10) (b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(7\pi/3))$

64. (a) $\operatorname{tg}(\sec^{-1} 4)$ (b) $\operatorname{sen}\left(2 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

65. Demonstre que $\cos(\operatorname{sen}^{-1}) = \sqrt{1 - x^2}$

66–68 Simplifique a expressão.

66. $\operatorname{tg}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ **67.** $\operatorname{sen}(\operatorname{tg}^{-1} x)$

68. $\cos(2 \operatorname{tg}^{-1} x)$

69–70 Obtenha os gráficos das funções dadas em uma mesma tela. Como esses gráficos estão relacionados?

69. $y = \operatorname{sen} x; \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2, \quad y = \operatorname{sen}^{-1} x, \quad y = x$

70. $y = \operatorname{tg} x; \quad -\pi/2 < x < \pi/2, \quad y = \operatorname{tg}^{-1} x, \quad y = x$

71. Determine o domínio e a imagem da função

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

72. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ e explique sua aparência.
(b) Faça o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. Como você pode explicar a aparência desse gráfico?

73. (a) Se transladamos uma curva para a esquerda, o que acontece com sua reflexão em torno da reta $y = x$? Em vista deste princípio geométrico, encontre uma expressão para a inversa de $g(x) = f(x + c)$, em que f é uma função injetora.
(b) Encontre uma expressão para a inversa de $h(x) = f(cx)$, em que $c \neq 0$.