

4.4 EXERCÍCIOS

1-4 Dado que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a} q(x) = \infty$$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{p(x)}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{f(x)}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}$
2. (a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x \rightarrow a} [h(x)p(x)]$
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} [p(x)q(x)]$

$$3. \quad (a) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] \quad (b) \lim_{x \rightarrow a} [p(x) - q(x)]$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} [p(x) + q(x)]$$

$$4. \quad (a) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} \quad (b) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{p(x)} \quad (c) \lim_{x \rightarrow a} [h(x)]^{p(x)}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow a} [p(x)]^{f(x)} \quad (e) \lim_{x \rightarrow a} [p(x)]^{q(x)} \quad (f) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$$

5-64 Encontre o limite. Use a Regra de L'Hôpital quando for apropriado. Se existir um método mais elementar, use-o. Se a Regra de L'Hôpital não for aplicável, explique por quê.

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}$
12. $\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{e^{3t} - 1}{t}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{tg} qx}$
14. $\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} t}{t}$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2}{1 - 2x^2}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln x}{x}$
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$
20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{\operatorname{tg} x}$
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$
25. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t - 3^t}{t}$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$
28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$
29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$
31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$
32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg}^{-1}(4x)}$
33. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$
34. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$
35. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$
36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$
37. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$
38. $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$
39. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$
40. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$
41. $\lim_{x \rightarrow 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$
42. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x$
43. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x^2}$
44. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \operatorname{sec} x$
45. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \operatorname{tg}(\pi x/2)$
46. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{tg}(1/x)$
47. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$
48. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{csc} x - \cot x)$
49. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$
50. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$
51. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$
52. $\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x} - x)$
53. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$
54. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} 2x)^x$
55. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{1/x}$
56. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx}$
57. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)^x$
58. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$
59. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$
60. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x}$
61. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$
62. $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$
63. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$
64. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x + 5} \right)^{2x + 1}$

65–66 Use gráficos para estimar o valor do limite. A seguir, use a Regra de L'Hôpital para encontrar o valor exato.

65. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$ 66. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

67–68 Ilustre a Regra de L'Hôpital fazendo o gráfico de $f(x)/g(x)$ e $f'(x)/g'(x)$ próximo de $x = 0$, para ver que essas razões têm o mesmo limite quando $x \rightarrow 0$. Calcule também o valor exato do limite.

67. $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x^3 + 4x$

68. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x$, $g(x) = \operatorname{sec} x - 1$

69. Demonstre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para todo n inteiro positivo. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x .

70. Demonstre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para todo número $p > 0$. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x .

71. Mostre o que acontece se você tentar usar a regra de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Calcule o limite usando outro método.

