3.5 EXERCÍCIOS

1–4

(a) Encontre y' derivando implicitamente.

(b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x.

(c) Verifique que suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes, substituindo a expressão para y em sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ **4.** $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5–20 Encontre dy/dx derivando implicitamente.

5. $x^2 + y^3 = 1$ **6.** $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$ **8.** $x^2 - 2xy + y^3 = c$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ **10.** $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$ **12.** $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$ **14.** $y \operatorname{sen}(x^2) = x \operatorname{sen}(y^2)$

15. $e^{x/y} = x - y$ **16.** $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$ **18.** $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

19. $xy = \operatorname{cotg}(xy)$ **20.** $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

21. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, ache $f'(1)$.

22. Se $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, ache $g'(0)$.

23–24 Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a derivação implícita para encontrar dx/dy.

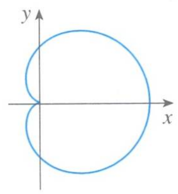
23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ **24.** $y \sec x = x \operatorname{tg} y$

25–30 Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

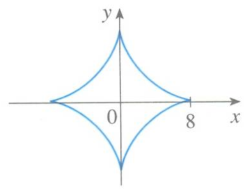
25. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

26. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbole)

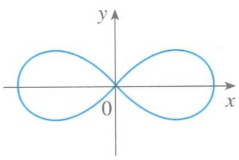
27. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$
(cardioide)



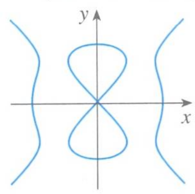
28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$\left(-3\sqrt{3}, 1\right)$
(astroide)



29. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



30. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva do diabo)



31. (a) A curva com equação $y^2 = 5x^4 - x^2$ é chamada **kampyle** (do grego, curvado) **de Eudoxo**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente em uma tela comum. (Se sua ferramenta gráfica puder fazer o gráfico de curvas definidas implicitamente, então use esse recurso. Se não, você poderá ainda fazer o gráfico dessa curva separando sua metade superior da inferior.)

32. (a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada **cúbica de Tschirnhausen**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.

(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?

(c) Ilustre as partes (a) e (b) fazendo o gráfico da curva e das retas tangentes sobre uma tela comum.

33–36 Encontre y'' por derivação implícita.

33. $9x^2 + y^2 = 9$ **34.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

35. $x^3 + y^3 = 1$ **36.** $x^4 + y^4 = a^4$

SCA **37.** Formas extravagantes podem ser criadas usando-se a capacidade de traçar funções definidas implicitamente de um SCA.

(a) Faça o gráfico da curva com equação

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

Em quantos pontos essa curva tem tangentes horizontais? Estime as coordenadas x desses pontos.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$.

(c) Encontre as coordenadas x exatas nos pontos da parte (a).

(d) Crie curvas mais extravagantes ainda modificando a equação da parte (a).

SCA **38.** (a) A curva com a equação

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

tem sido comparada com um "vagão sacolejante". Use um SCA para fazer essa curva e descubra o porquê desse nome.

(b) Em quantos pontos essa curva tem retas tangentes horizontais? Encontre as coordenadas x desses pontos.

39. Encontre os pontos sobre a lemniscata do Exercício 29 onde a tangente é horizontal.

40. Mostre, fazendo a derivação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

41. Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0).

42. Mostre que a soma das coordenadas das intersecções com os eixos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

43. Mostre, usando a derivação implícita, que qualquer reta tangente, em um ponto P, a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP.

44. A Regra da Potência pode ser demonstrada usando a derivação implícita para o caso onde n é um número racional, $n = p/q$, e $y = f(x) = x^n$ é suposta de antemão ser uma função derivável. Se $y = x^{p/q}$, então $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para mostrar que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

45–54 Encontre a derivada da função. Simplifique onde possível.

45. $y = \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x}$ **46.** $y = \sqrt{\operatorname{tg}^{-1} x}$

47. $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x + 1)$ **48.** $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\sec^{-1} x$

49. $H(x) = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$ **50.** $y = \operatorname{tg}^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

51. $h(t) = \operatorname{cotg}^{-1}(t) + \operatorname{cotg}^{-1}(1/t)$ **52.** $F(\theta) = \operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen}\theta}$

53. $y = \cos^{-1}(e^{2x})$ **54.** $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

55–56 Encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

55. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\operatorname{arcsen} x$ **56.** $f(x) = x\operatorname{arctg}(x^2 - x)$

57. Demonstre a fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ pelo mesmo método usado para $(d/dx)(\operatorname{sen}^{-1}x)$.

58. (a) Uma maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \Leftrightarrow \sec y = x$ e $0 \leqslant y < \pi/2$ ou $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Mostre que, se essa definição for adotada, então

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Outra maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \Leftrightarrow \sec y = x$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq 0$. Mostre que, se essa definição for adotada, então

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

59–62 Duas curvas são **ortogonais** se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção. Mostre que as famílias dadas de curvas são **trajetórias ortogonais** uma em relação a outra, ou seja, toda curva de uma família é ortogonal a toda curva da outra família. Esboce ambas as famílias de curvas no mesmo sistema de coordenadas.

59. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

60. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

61. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

62. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

63. A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

64. (a) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ no ponto $(-1, 1)$ intercepta a elipse uma segunda vez?

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da elipse e da reta normal.

65. Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1.

66. Encontre as equações de ambas as retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passam pelo ponto $(12, 3)$.

67. (a) Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua função inversa f^{-1} seja também derivável. Use a derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja 0.

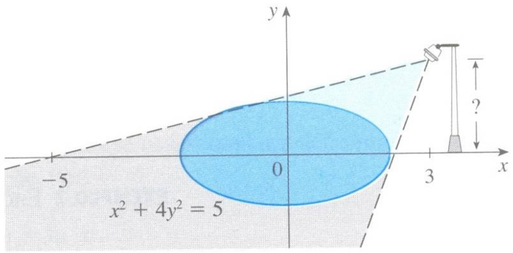
(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \frac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

68. (a) Mostre que $f(x) = 2x + \cos x$ é injetora.

(b) Qual o valor de $f^{-1}(1)$?

(c) Use a fórmula do Exercício 67(a) para determinar $(f^{-1})'(1)$.

69. A figura mostra uma lâmpada localizada três unidades à direita do eixo y e uma sombra originada pela região elíptica $x^2 + 4y^2 \leqslant 5$. Se o ponto $(-5, 0)$ estiver na borda da sombra, qual a altura da lâmpada acima do eixo x?



3.6 EXERCÍCIOS

1. Explique por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais vezes no cálculo do que as outras funções logarítmicas $y = \log_a x$.

2–22 Derive a função.

2. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$

3. $f(x) = \text{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\text{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$

6. $f(x) = \log_5(xe^x)$

7. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

8. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

9. $f(x) = \sqrt{x}\, \ln x$

10. $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

11. $F(t) = \ln \dfrac{(2t + 1)^3}{(3t - 1)^4}$

12. $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

13. $g(x) = \ln(x\sqrt{x^2 - 1})$

14. $F(y) = y \ln(1 + e^y)$

15. $y = \dfrac{\ln x}{1 + x}$

16. $y = \ln(x^4 \,\text{sen}^2 x)$

17. $y = \ln |2 - x - 5x^2|$

18. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $y = [\ln(1 + e^x)]^2$

21. $y = 2x \log_{10} \sqrt{x}$

22. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

23–26 Encontre y' e y''.

23. $y = x^2 \ln(2x)$

24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

25. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

26. $y = \ln(\sec x + \text{tg}\, x)$

27–30 Derive f e encontre o domínio de f.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Se $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, encontre $f'(1)$.

32. Se $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, encontre $f'(0)$.

33–34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \ln(xe^{x^2})$, $(1, 1)$

34. $y = \ln(x^3 - 7)$, $(2, 0)$

35. Se $f(x) = \text{sen}\, x + \ln x$, encontre $f'(x)$. Verifique que sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

36. Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = (\ln x)/x$ nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1/e)$. Ilustre fazendo o gráfico da curva e de suas retas tangentes.

37–48 Use a derivação logarítmica para achar a derivada de função.

37. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

38. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

39. $y = \dfrac{\text{sen}^2 x\, \text{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2}$

40. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$

41. $y = x^x$

42. $y = x^{1/x}$

43. $y = x^{\text{sen}\, x}$

44. $y = \sqrt{x}^x$

45. $y = (\cos x)^x$

46. $y = (\text{sen}\, x)^{\ln x}$

47. $y = (\text{tg}\, x)^{1/x}$

48. $y = (\ln x)^{\cos x}$

49. Encontre y' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

50. Encontre y' se $x^y = y^x$.

51. Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = \ln(x - 1)$.

52. Encontre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

53. Use a definição da derivada para demonstrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

54. Mostre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para qualquer $x > 0$.