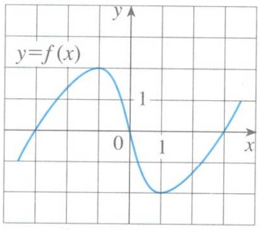
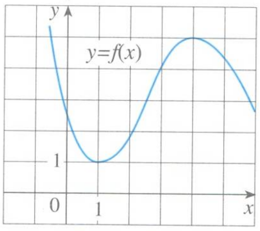
2.8 EXERCÍCIOS

1–2 Use os gráficos dados para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

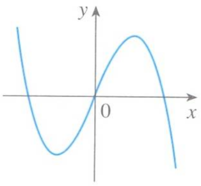
1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

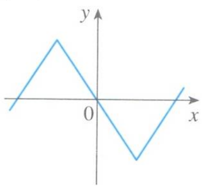


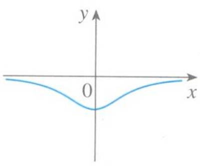
2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$

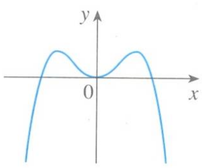


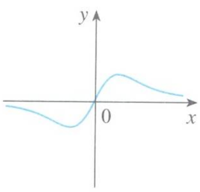
3. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I-IV. Dê razões para suas escolhas.

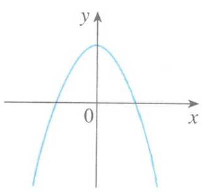
(a)


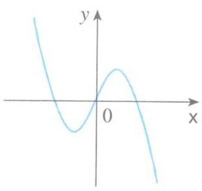
(b)


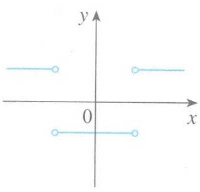
(c)


(d)


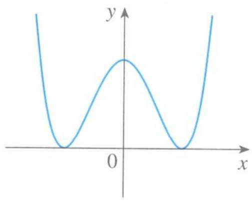
I


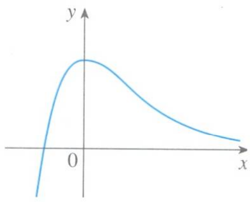
II


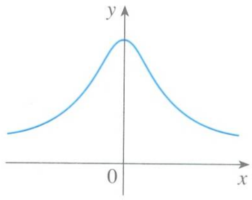
III


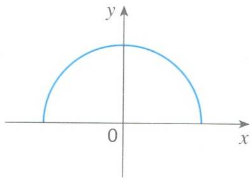
IV


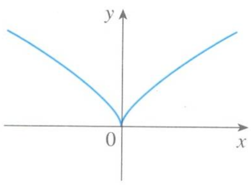
4–11 Trace ou copie o gráfico da função f dada. (Suponha eixos com a mesma escala.) Use então o método do Exemplo 1 para esboçar o gráfico de f'.

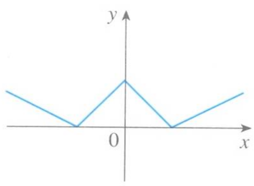
4.


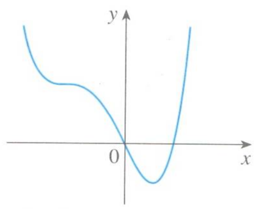
5.


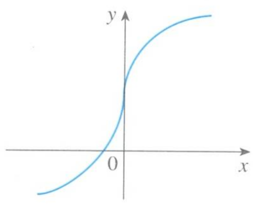
6.


7.


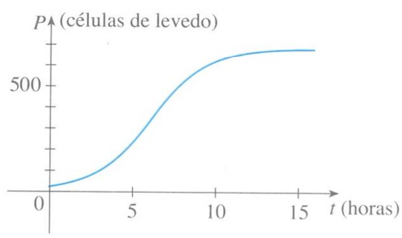
8.


9.


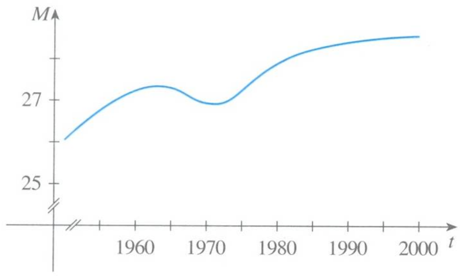
10.


11.


12. O gráfico mostrado corresponde ao da função população $P(t)$ de cultura em laboratório de células de levedo. Use o método do Exemplo 1 para obter o gráfico da derivada $P'(t)$. O que o gráfico de P' nos diz sobre a população de levedos?



13. O gráfico mostra como a idade média dos homens japoneses quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX. Esboce o gráfico da função derivada $M'(t)$. Em quais os anos a derivada foi negativa?



14–16 Faça um esboço cuidadoso de f e abaixo dele esboce o gráfico de f' como foi feito nos Exercícios 4-11. Você pode sugerir uma fórmula para $f'(x)$ a partir de seu gráfico?

14. $f(x) = \operatorname{sen} x$ **15.** $f(x) = e^x$

16. $f(x) = \ln x$

17. Seja $f(x) = x^2$.
(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1)$ e $f'(2)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para fazer um *zoom* no gráfico de f.
(b) Use a simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1)$ e $f'(-2)$.
(c) Utilize os resultados de (a) e (b) para conjectturar uma fórmula para $f'(x)$.
(d) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (c) está correta.

18. Seja $f(x) = x^3$.
(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(2)$ e $f'(3)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para fazer um *zoom* no gráfico de f.
(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1)$, $f'(-2)$ e $f'(-3)$.
(c) Empregue os valores de (a) e (b) para fazer o gráfico de f'.
(d) Conjecture uma fórmula para $f'(x)$.
(e) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (d) está correta.

19–29 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ **20.** $f(x) = mx + b$

21. $f(t) = 5t - 9t^2$ **22.** $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 3{,}7$

23. $f(x) = x^3 - 3x + 5$ **24.** $f(x) = x + \sqrt{x}$

25. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$ **26.** $f(x) = \dfrac{3 + x}{1 - 3x}$

27. $G(t) = \dfrac{4t}{t + 1}$ **28.** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

29. $f(x) = x^4$

30. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ começando pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$ e usando as transformações da Seção 1.3.
(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.
(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$. Quais os domínios de f e f'?
(d) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico f' e compare-o com o esboço na parte (b).

31. (a) Se $f(x) = x^4 + 2x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

32. (a) Se $f(t) = t^2 - \sqrt{t}$, encontre, $f'(t)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

33. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela fornece a porcentagem de desempregados na força de trabalho australiana em meados de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8,1	2000	6,2
1996	8,0	2001	6,9
1997	8,2	2002	6,5
1998	7,9	2003	6,2
1999	6,7	2004	5,6

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa a tabela de valores de $U'(t)$.

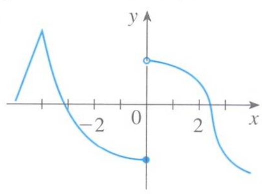
34. Seja $P(t)$ a porcentagem da população das Filipinas com idade maior que 60 anos no instante t. A tabela fornece projeções dos valores desta função de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5,2	2010	6,7
2000	5,5	2015	7.7
2005	6.1	2020	8,9

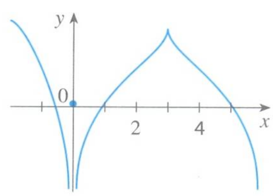
(a) Qual o significado de $P'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $P'(t)$.
(c) Faça os gráficos de P e P'.

35-38 O gráfico de f é dado. Diga, explicando quais, os números em que f não é diferenciável.

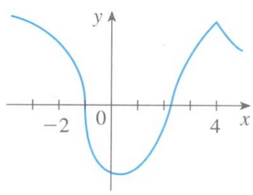
35.



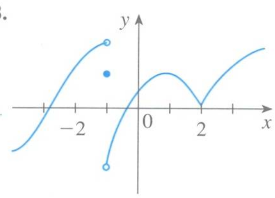
36.



37.



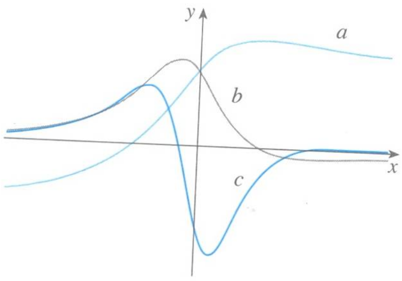
38.



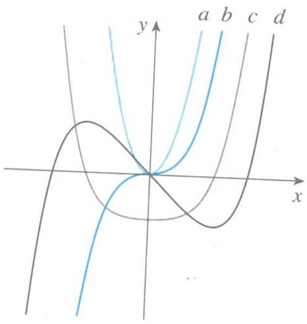
39. Faça o gráfico da função $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Dê um *zoom* primeiro em direção ao ponto $(-1, 0)$ e então em direção à origem. Qual a diferença entre os comportamentos de f próximo a esses dois pontos? O que você conclui sobre a diferenciabilidade de f?

40. Dê um *zoom* em direção aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ sobre o gráfico da função $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. O que você observa? Explique o que você viu em termos da diferenciabilidade de g.

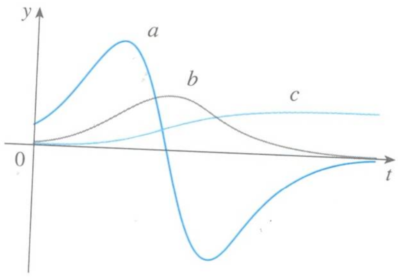
41. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



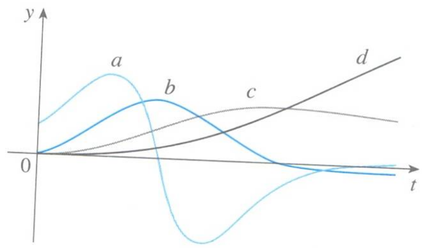
42. A figura mostra os gráficos de $f, f'\ f''$ e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



43. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função posição de um carro, outra é a velocidade do carro e outra é sua aceleração. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



44. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função posição de um carro, outra é a velocidade do carro, outra é sua aceleração e outra é seu *jerk*. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

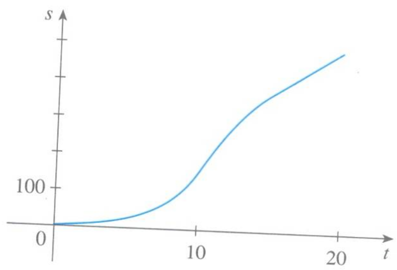


45-46 Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$ e $f''(x)$. A seguir, trace f, f' e f'' em uma mesma tela e verifique se suas respostas são razoáveis.

45. $f(x) = 1 + 4x - x^2$ **46.** $f(x) = 1/x$

47. Se $f(x) = 2x^2 - x^3$, encontre $f'(x), f''(x), f'''(x)$, e $f^{(4)}(x)$. Trace f, f', f'' e f''' em uma mesma tela. Os gráficos são consistentes com as interpretações geométricas destas derivadas?

48. (a) É mostrado o gráfico da função posição de um veículo, onde s é medido em metros e t em segundos. Use-o para traçar a velocidade e a aceleração do veículo. Qual é a aceleração em $t = 10$ segundos?



(b) Use a curva da aceleração da parte (a) para estimar o *jerk* em $t = 10$ segundos. Qual a unidade do *jerk*?

49. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(a) Se $a \neq 0$, use a Equação 2.7.5 para encontrar $f'(a)$.

(b) Mostre que $f'(0)$ não existe.

(c) Mostre que $y = \sqrt[3]{x}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$. (Lembre-se da forma do gráfico de f. Veja a Figura 13 na Seção 1.2.)

50. (a) Se $g(x) = x^{2/3}$, mostre que $g'(0)$ não existe.

(b) Se $a \neq 0$, encontre $g'(a)$.

(c) Mostre que $y = x^{2/3}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$.

(d) Ilustre a parte (c) fazendo o gráfico de $y = x^{2/3}$.

51. Mostre que a função $f(x) = |x - 6|$ não é diferenciável em 6. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

52. Onde a função maior inteiro não é diferenciável? Encontre uma fórmula para $f(x) = [\![x]\!]$ e esboce seu gráfico.

53. (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x|x|$.
(b) Para quais os valores de x f é diferenciável?
(c) Encontre uma fórmula para f'.

54. A **derivada à esquerda** e **à direita** de f em a são definidas por

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

e $$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem. Então $f'(a)$ existe se, e somente se, essas derivadas unilaterais existirem e forem iguais.
(a) Encontre $f'_{-}(4)$ e $f'_{+}(4)$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{se } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico de f.
(c) Onde f é descontínua?
(d) Onde f não é diferenciável?

55. Lembre-se de que uma função f é chamada *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para cada um destes x. Demonstre cada uma das afirmativas a seguir.
(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.
(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

56. Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende do tempo no qual a água está correndo.
(a) Esboce um gráfico possível de T como uma função do tempo t que decorreu desde que a torneira foi aberta.
(b) Descreva como é a taxa de variação de T em relação a t quando t está crescendo.
(c) Esboce um gráfico da derivada de T.

57. Seja ℓ a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$. O *ângulo de inclinação* de ℓ é o ângulo ϕ que ℓ faz com a direção positiva do eixo x. Calcule ϕ com a precisão de um grau.

1 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Explique o significado de cada um dos limites a seguir e ilustre com um esboço.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
(e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Descreva as várias situações nas quais um limite pode não existir. Ilustre-as com uma figura.

3. Enuncie cada uma das seguintes Propriedades dos Limites.
(a) Propriedade da Soma (b) Propriedade da Diferença
(c) Propriedade do Múltiplo Constante (d) Propriedade do Produto
(e) Propriedade do Quociente (f) Propriedade da Potência
(g) Propriedade da Raiz

4. O que afirma o Teorema do Confronto?

5. (a) O que significa dizer que uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.
(b) O que significa dizer que uma reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.

6. Quais das curvas a seguir têm assíntotas verticais? E horizontais?
(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$ (c) $y = \operatorname{tg} x$
(d) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ (e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) Qual o significado de f ser contínua em a?
(b) Qual o significado de f ser contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$? Nesse caso, o que se pode dizer sobre o gráfico de f?

8. O que afirma o Teorema do Valor Intermediário?

9. Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

10. Considere um objeto movendo-se ao longo de uma reta com a posição dada por $f(t)$ no instante t. Escreva uma expressão para a velocidade instantânea do objeto em $t = a$. Como pode ser interpretada essa velocidade em termos do gráfico de f?

11. Se $y = f(x)$ e x variar de x_1 a x_2, escreva uma expressão para o seguinte:
(a) Taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$.
(b) Taxa instantânea de variação de y em relação a x em $x = x_1$.

12. Defina a derivada $f'(a)$. Discuta as duas maneiras de interpretar esse número.

13. Defina a segunda derivada de f. Se $f(t)$ for a função posição de uma partícula, como você pode interpretar a segunda derivada?

14. (a) O que significa f ser diferenciável em a?
(b) Qual a relação entre diferenciabilidade e continuidade de uma função?
(c) Esboce o gráfico de uma função que é contínua, mas não diferenciável em $a = 2$.

15. Descreva as várias situações nas quais uma função não é diferenciável. Ilustre-as com figuras.