2.7 EXERCÍCIOS

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.

(a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.

(b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

2. Faça o gráfico da curva $y = e^x$ nas janelas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0{,}5, 0{,}5]$ por $[0{,}5, 1{,}5]$ e $[-0{,}1, 0{,}1]$ por $[0{,}9, 1{,}1]$. Dando um *zoom* no ponto $(0, 1)$, o que você percebe na curva?

3. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$.

(i) usando a Definição 1 (ii) usando a Equação 2

(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).

(c) Faça os gráficos da parábola e da reta tangente. Como verificação, dê um *zoom* em direção ao ponto $(1, 3)$ até que parábola e a reta tangente fiquem indistinguíveis.

4. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto $(1, 0)$

(i) usando a Definição 1 (ii) usando a Equação 2

(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).

(c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em janelas retangulares cada vez menores centrados no ponto $(1, 0)$ até que a curva e a tangente pareçam indistinguíveis.

5–8 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

5. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$, $(3, 2)$

6. $y = 2x^3 - 5x$, $(-1, 3)$

7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$, $(0, 0)$

9. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto onde $x = a$.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 5)$ e $(2, 3)$.

(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as retas tangentes em uma mesma tela.

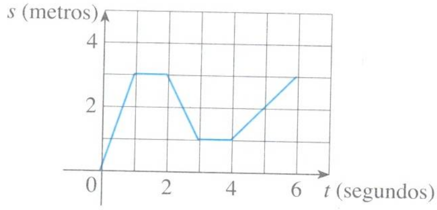
10. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto onde $x = a$.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 1)$ e $(4, \frac{1}{2})$.

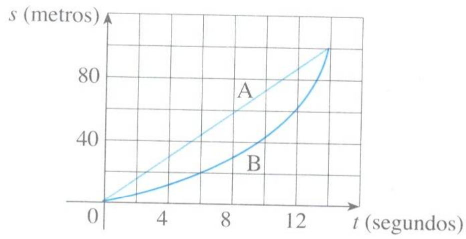
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

11. (a) Uma partícula começa se movendo para a direita ao longo de uma reta horizontal; o gráfico de sua função posição está mostrado. Quando a partícula está se movendo para a direita? E para a esquerda? Quando está parada?

(b) Trace um gráfico da função velocidade.



12. Estão dados os gráficos das funções posições de dois corredores, A e B, que correm 100 metros rasos e terminam empatados.



(a) Descreva e compare como os corredores correram a prova.

(b) Em que instante a distância entre os corredores é maior?

(c) Em que instante eles têm a mesma velocidade?

13. Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

14. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1{,}86t^2$.

(a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.

(b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.

(c) Quando a pedra atinge a superfície?

(d) Com que velocidade da pedra atinge a superfície?

15. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = 1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

16. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, em que t é medido em segundos.

(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:

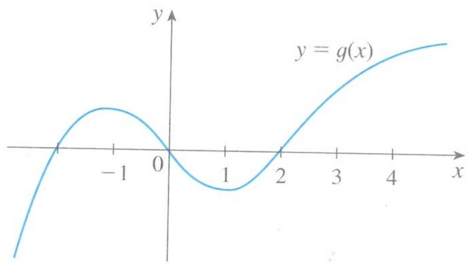
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3{,}5, 4]$ (iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4{,}5]$

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.

(c) Faça o gráfico de s como uma função de t e desenhe as retas secantes cujas inclinações são as velocidades médias da parte (a), e a reta tangente cuja inclinação é a velocidade instantânea da parte (b).

17. Para a função g cujo gráfico é dado, arrume os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



18. (a) Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = g(x)$, em $x = 5$ se $g(5) = -3$ e $g'(5) = 4$.

(b) Se a reta tangente a $y = f(x)$ em $(4, 3)$ passar pelo ponto $(0, 2)$, encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

19. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$, e $f'(2) = -1$.

20. Esboce o gráfico de uma função g para a qual $g(0) = g'(0) = 0$, $g'(-1) = -1$, $g'(1) = 3$, e $g'(2) = 1$.

21. Se $f(x) = 3x^2 - 5x$, encontre $f'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à parábola $y = 3x^2 - 5x$ no ponto $(2, 2)$.

22. Se $g(x) = 1 - x^3$, encontre $g'(0)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^3$ no ponto $(0, 1)$.

23. (a) Se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encontre $F'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 5x/(1 + x^2)$ no ponto $(2, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente na mesma tela.

24. (a) Se $G(x) = 4x^2 - x^3$, encontre $G'(a)$ e use-o para encontrar equações das retas tangentes à curva $y = 4x^2 - x^3$ nos pontos $(2, 8)$ e $(3, 9)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e as retas tangentes na mesma tela.

25–30 Encontre $f'(a)$.

25. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

26. $f(t) = t^4 - 5t$

27. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

30. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

31–36 Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga quem é f e a em cada caso.

31. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

32. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \pi/4}$

35. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

36. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

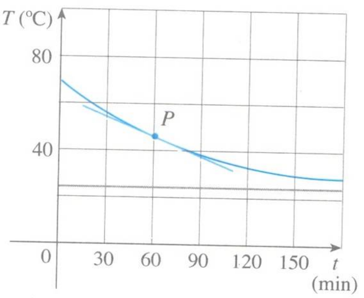
37-38. Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s = f(t)$, em que s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t = 5$.

37. $f(t) = 100 + 50t - 4{,}9t^2$

38. $f(t) = t^{-1} - t$

39. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

40. Um peru assado é tirado do forno quando sua temperatura atinge 85 ºC e colocado sobre uma mesa na sala, na qual a temperatura é de 24 ºC. O gráfico mostra como decresce a temperatura do peru até aproximar da temperatura da sala. (Na Seção 3.8 poderemos usar a Lei do Resfriamento de Newton para encontrar uma equação para T como uma função do tempo.) Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.



41. A tabela mostra a estimativa da porcentagem da população da Europa que usa telefones celulares. (Estimativas dadas para meados do ano.)

Ano	1998	1999	2000	2001	2002	2003
P	28	39	55	68	77	83

(a) Encontre a taxa média do crescimento do número de celulares
(i) de 2000 a 2002 (ii) de 2000 a 2001 (iii) de 1999 a 2000
Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2000 tomando a média de duas taxas médias da variação. Quais são suas unidades?

(c) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2000 medindo a inclinação de uma tangente.

42. O número N de franquias de uma certa cadeia popular de cafeteiras é mostrada na tabela. (Dados os números de franquias no dia 30 de junho de cada ano.)

Ano	1998	1999	2000	2001	2002
N	1 886	2 135	3 501	4 709	5 886

(a) Determine a taxa média de crescimento
(i) de 2000 a 2002 (ii) de 2000 a 2001 (iii) de 1999 a 2000
Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2000 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?

(c) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2000 medindo a inclinação de uma tangente.

43. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5\,000 + 10x + 0{,}05x^2$.

(a) Encontre a taxa média da variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando
(i) de $x = 100$ a $x = 105$ (ii) de $x = 100$ a $x = 101$

(b) Encontre a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$. (Isso é chamado *custo marginal*. Seu significado será explicado na Seção 3.7.)

44. Se um tanque cilíndrico comporta 100 000 litros de água, que podem escoar pela base do tanque em uma hora, então a Lei de Torricelli fornece o volume V de água que restou no tanque após t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60$$

Encontre a taxa pela qual a água está escoando para fora do tanque (a taxa instantânea da variação de V em relação a t) como uma função de t. Quais são suas unidades? Para os instantes t = 0, 10, 20, 30, 40, 50 e 60 minutos, encontre a taxa do escoamento e a quantidade de água restante no tanque. Resuma o que você achou em uma ou duas sentenças. Em que instante a taxa do escoamento é máxima? E a mínima?

45. O custo da produção de x quilogramas de ouro provenientes de uma nova mina é $C = f(x)$ dólares.

(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais são suas unidades?

(b) O que significa $f'(50) = 36$?

(c) Você acha que os valores de $f'(x)$ vão crescer ou decrescer a curto prazo? E a longo prazo? Explique.

46. O número de bactéria depois de t horas em um laboratório experimental controlado é $n = f(x)$.

(a) Qual o significado da derivada de $f'(5)$? Quais são suas unidades?

(b) Suponha que haja uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. Qual será maior: $f'(5)$ ou $f'(10)$? Se a oferta de nutrientes for limitada, isso afetaria sua conclusão? Explique.

47. Seja $T(t)$ a temperatura (em °C) em Seul t horas após o meio-dia em 21 de agosto de 2004. A tabela mostra os valores dessa função registrados de duas em duas horas. Qual o significado de $T'(6)$? Estime o seu valor.

t	0	2	4	6	8	10
T	34,4	35,6	38,3	32,8	26,1	22,8