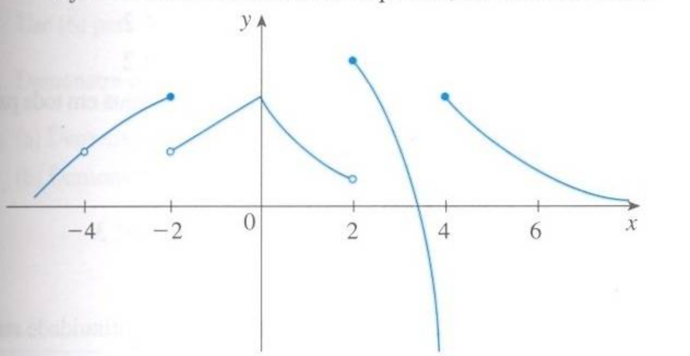
2.5 EXERCÍCIOS

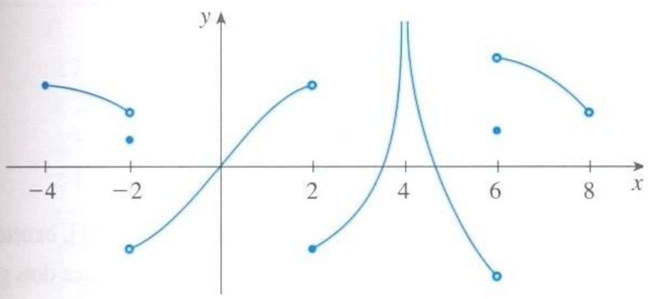
1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

2. Se f é contínua em $(-\infty,\infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, diga os números nos quais f é descontínua e explique por quê.
   (b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



4. Do gráfico de g, diga os intervalos nos quais g é contínua.



5. Esboce o gráfico de uma função que é contínua em toda a parte, exceto em $x = 3$ e é contínua à esquerda em 3.

6. Esboce o gráfico de uma função que tenha uma descontinuidade de salto em $x = 2$ e uma descontinuidade removível em $x = 4$, mas seja contínua no restante.

7. Um estacionamento cobra \$ 3 pela primeira hora ou fração, e \$ 2 por hora sucessiva, ou fração, até o máximo diário de \$ 10.
   (a) Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido.
   (b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use o estacionamento.

8. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
   (a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo
   (b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris
   (c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris
   (d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida
   (e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo

9. Se f e g forem funções contínuas, com $f(3) = 5$ e $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$, encontre $g(3)$.

10–12 Use a definição de continuidade e propriedades dos limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número a.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \qquad a = 4$

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

12. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

13–14 Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

14. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$

15–20 Explique por que a função é descontínua no número dado a. Esboce o gráfico da função.

15. $f(x) = \ln |x - 2| \quad a = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad a = 1$

17. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases} \quad a = 0$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad a = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad a = 3$

21–28 Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Diga o domínio.

21. $G(x) = \dfrac{x^4 + 17}{6x^2 + x - 1}$

22. $G(x) = \sqrt[3]{x}\,(1 + x^3)$

23. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$

24. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$

25. $L(t) = e^{-5t} \cos 2\pi t$

26. $F(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 - 1)$

27. $G(t) = \ln (t^4 - 1)$

28. $H(x) = \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

29–30 Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

29. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

30. $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

31–34 Use a continuidade para calcular o limite.

31. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

32. $\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

33. $\lim\limits_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

34. $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

35–36 Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

35. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{se } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

37–39 Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

37. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

40. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geqslant R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

41. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

42. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 < x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

43. Quais das seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que seja igual a f para $x \neq a$ e seja contínua em a.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

44. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f poderia ainda satisfazer a conclusão do Teorema Valor Intermediário (mesmo que não satisfaça as hipóteses).

45. Se $f(x) = x^2 + 10 \text{ sen } x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1\,000$.

46. Suponha f contínua em $[1, 5]$ e que as únicas soluções da equação $f(x) = 6$ são $x = 4$ e $x = 1$. Se $f(2) = 8$, explique por que $f(3) > 6$.

47–50 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

47. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

48. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

49. $\cos x = x, \quad (0, 1)$

50. $\ln x = e^{-x}, \quad (1, 2)$

51–52 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua calculadora para encontrar um intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

51. $e^x = 2 - x$

52. $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$

53–54 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua ferramenta gráfica para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

53. $100e^{-x/100} = 0{,}01x^2$

54. $\text{arctg } x = 1 - x$

55. Demonstre que f é contínua em a se e somente se

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

56. Para demonstrar que seno é contínuo, precisamos mostrar que $\lim_{x \to a} \text{sen } x = \text{sen } a$ para todo número real a. Pelo Exercício 55, uma afirmação equivalente é que

$$\lim_{h \to 0} \text{sen } (a + h) = \text{sen } a$$

Use (6) para mostrar que isso é verdadeiro.

57. Demonstre que o cosseno é uma função contínua.

58. (a) Demonstre a parte 3 do Teorema 4.
(b) Demonstre a parte 5 do Teorema 4.

59. Para que valores de x a função f é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

60. Para que valores de x a função g é contínua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

61. Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo?

62. Se a e b são números positivos, demonstre que a equação

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tem pelo menos uma solução no intervalo $(-1, 1)$.

63. Demonstre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \text{ sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $(-\infty, \infty)$.

64. (a) Mostre que a função valor absoluto $F(x) = |x|$ é contínua em toda a parte.
(b) Demonstre que se f for uma função contínua em um intervalo, então $|f|$ também o é.
(c) A recíproca da afirmação da parte (b) também é verdadeira? Em outras palavras, se $|f|$ for contínua, segue que f também é? Se for assim, demonstre isso. Caso contrário, encontre um contraexemplo.

65. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.