Se E e r forem fixados, mas R variar, qual é o valor mínimo da potência?

42. Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que os peixes migratórios tentam minimizar a energia total necessária para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente u $(u < v)$, então o tempo necessário para nadar a uma distância L é $L/(v - u)$ e a energia total E requerida para nadar a distância é dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade.

(a) Determine o valor de v que minimiza E.

(b) Esboce o gráfico de E.

Observação: Esse resultado foi verificado experimentalmente; peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% maior que a velocidade da corrente.

43. Em uma colmeia, cada alvéolo é um prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade com um ângulo triédrico na outra extremidade. Acredita-se que as abelhas formam esses alvéolos de modo a minimizar a área da superfície para um dado volume, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame desses alvéolos mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria do alvéolo, pode ser mostrado que a área da superfície S é dada por

$$S = 6sh = \tfrac{3}{2}s^2 \text{cotg}\ \theta + (3s^2\sqrt{3}/2)\ \text{cossec}\ \theta$$

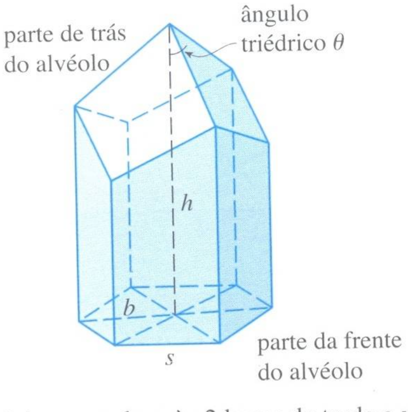
onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura, são constantes.

(a) Calcule $dS/d\theta$.

(b) Que ângulo as abelhas deveriam preferir?

(c) Determine a área da superfície mínima do alvéolo (em termos de s e h).

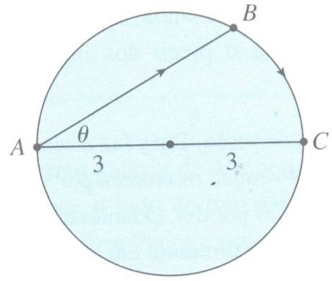
Observação: Medidas reais do ângulo θ em colmeias foram feitas, e as medidas desses ângulos raramente diferem do valor calculado em mais que 2°.



44. Um bote deixa uma doca às 2 horas da tarde e viaja na direção sul a uma velocidade de 20 km/h. Outro bote está indo para a direção leste a 15 km/h e atinge a mesma doca às 3 horas da tarde. Em que momento os dois botes estavam mais próximos um do outro?

45. Resolva o problema no Exemplo 4 se o rio tiver 5 km de largura e o ponto B estiver somente a 5 km de A rio abaixo.

46. Uma mulher em um ponto A na praia de um lago circular com raio de 3 km quer chegar no ponto C diametralmente oposto a A do outro lado do lago no menor tempo possível. Ela pode andar a uma taxa de 6 km/h e remar um bote a 3 km/h. Como deve proceder?



47. Uma refinaria de petróleo está localizada na margem norte de um rio reto que tem 2 km de largura. Um oleoduto deve ser construído da refinaria até um tanque de armazenamento localizado na margem sul do rio, 6 km a leste da refinaria. O custo de construção do oleoduto é \$ 400 000/km sobre a terra, até um ponto P na margem norte e \$ 800 000/km sob o rio até o tanque. Onde P deveria estar localizado para minimizar o custo do oleoduto?

48. Suponha que a refinaria do Exercício 47 esteja localizada 1 km ao norte do rio. Onde P deveria estar situado?

49. A iluminação de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Se duas fontes de luz, uma três vezes mais forte que a outra, são colocadas a 4 m de distância, onde deve ser colocado o objeto sobre a reta entre as fontes de forma a receber o mínimo de iluminação?

50. Encontre uma equação da reta que passa pelo ponto $(3, 5)$ e que delimita a menor área do primeiro quadrante.

51. Sejam a e b números positivos. Ache o comprimento do menor segmento de reta que é cortado pelo primeiro quadrante e passa pelo ponto (a, b).

52. Em quais pontos da curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ a reta tangente tem a sua maior inclinação?

53. (a) Se $C(x)$ for o custo para produzir x unidades de uma mercadoria, então o **custo médio** por unidade é $c(x) = C(x)/x$. Mostre que se o custo médio for mínimo, então o custo marginal é igual ao custo médio.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, em dólares, encontre (i) o custo, o custo médio e o custo marginal no nível de produção de 1 000 unidades; (ii) o nível de produção que minimizará o custo médio; e (iii) o custo médio mínimo.

54. (a) Mostre que se o lucro $P(x)$ for máximo, então a receita marginal é igual ao custo marginal.
(b) Se $C(x) = 16\,000 + 500x - 1{,}6x^2 + 0{,}004x^3$ for a função custo e $p(x) = 1\,700 - 7x$ a função demanda, encontre o nível de produção que maximiza o lucro.

55. Um time de beisebol joga em um estádio com capacidade para 55 000 espectadores. Com o preço dos ingressos a \$ 10, a frequência média tem sido de 27 000. Quando os preços dos ingressos abaixaram para \$ 8, a frequência média aumentou para 33 000.
(a) Encontre a função demanda, supondo que ela seja linear.
(b) Qual deveria ser o preço dos ingressos para maximizar a receita?

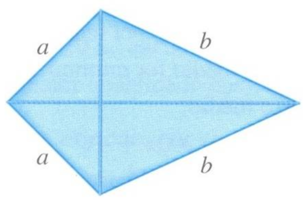
56. Durante os meses de verão, Terry faz e vende colares na praia. No verão passado, ele vendeu os colares por \$ 10 cada e suas vendas eram em média de 20 por dia. Quando ele aumentou o preço \$ 1, descobriu que a média diminuiu em duas vendas por dia.
(a) Encontre a função de demanda, supondo que ela seja linear.
(b) Se o material de cada colar custa a Terry \$ 6, qual deveria ser o preço de venda para maximizar seu lucro?

57. Um fabricante tem vendido 1 000 aparelhos de televisão por semana, a \$ 450 cada. Uma pesquisa de mercado indica que para cada \$ 10 de desconto oferecido ao comprador, o número de aparelhos vendidos aumenta 100 por semana.
(a) Encontre a função demanda.
(b) Que desconto a companhia deveria oferecer ao comprador para maximizar sua receita?
(c) Se sua função custo semanal for $C(x) = 68\,000 + 150x$, como o fabricante deveria escolher o tamanho do desconto para maximizar seu lucro?

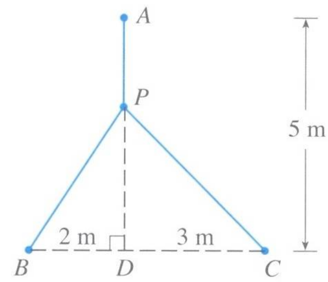
58. O gerente de um complexo de apartamentos com 100 unidades sabe, a partir da experiência, que todas as unidades estarão ocupadas se o aluguel for \$ 800 por mês. Uma pesquisa de mercado sugere que, em média, uma unidade adicional permanecerá vazia para cada \$ 10 de aumento no aluguel. Qual o aluguel que o gerente deveria cobrar para maximizar a receita?

59. Mostre que, de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é o equilátero.

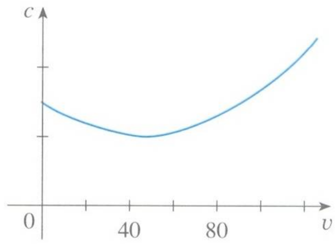
SCA **60.** A moldura para uma pipa é feita com seis pedaços de madeira. Os quatro pedaços externos foram cortados com os comprimentos indicados na figura. Para maximizar a área da pipa, de que tamanho devem ser os pedaços diagonais?



61. Um ponto P precisa ser localizado em algum ponto sobre a reta AD de forma que o comprimento total L de fios ligando P aos pontos A, B e C seja minimizado (veja a figura). Expresse L como uma função de $x = |AP|$ e use os gráficos de L e dL/dx para estimar o valor mínimo.



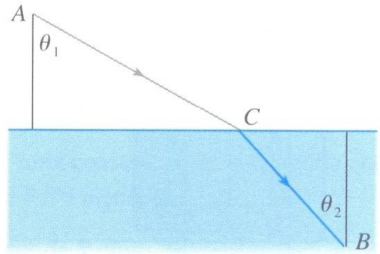
62. O gráfico mostra o consumo de combustível c de um carro (medido em litros/hora) como uma função da velocidade v do carro. Em velocidade muito baixa, o motor não rende bem; assim, inicialmente c decresce à medida que a velocidade cresce. Mas em alta velocidade o consumo cresce. Você pode ver que $c(v)$ é minimizado para esse carro quando $v \approx 48$ km/h. Porém, para a eficiência do combustível, o que deve ser minimizado não é o consumo em litros/hora, mas, em vez disso, o consumo de combustível em litros *por quilômetros*. Vamos chamar esse consumo de G. Usando o gráfico, estime a velocidade na qual G tem seu valor mínimo.



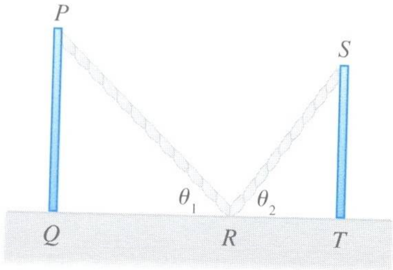
63. Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o Princípio de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

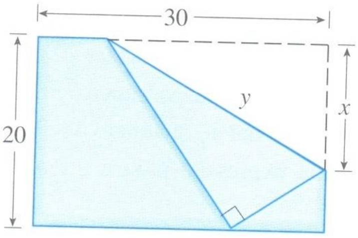
onde θ_1 (o ângulo de incidência) e θ_2 (o ângulo de refração) são conforme mostrados. Essa equação é conhecida como a Lei de Snell.



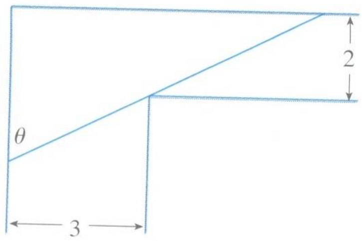
64. Dois postes verticais PQ e ST são amarrados por uma corda PRS que vai do topo do primeiro poste para um ponto R no chão entre os postes e então até o topo do segundo poste, como na figura. Mostre que o menor comprimento de tal corda ocorre quando $\theta_1 = \theta_2$.



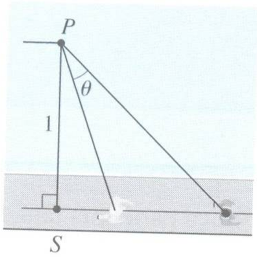
65. O canto superior direito de um pedaço de papel com 30 cm de largura por 20 cm de comprimento é dobrado sobre o lado direito, como na figura. Como você dobraria de forma a minimizar o comprimento da dobra? Em outras palavras, como você escolheria x para minimizar y?



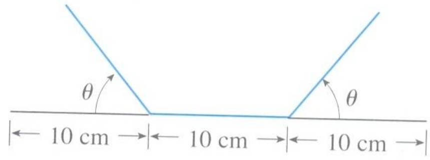
66. Um cano de metal está sendo carregado através de um corredor com 3 m de largura. No fim do corredor há uma curva em ângulo reto, passando-se para um corredor com 2 m de largura. Qual é o comprimento do cano mais longo que pode ser carregado horizontalmente em torno do canto?



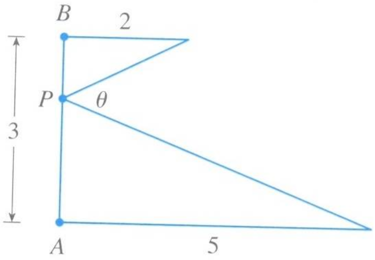
67. Um observador permanece em um ponto P, distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto S da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo θ de visão do observador entre os corredores. [*Sugestão*: Maximize tg θ.]



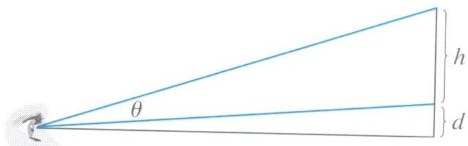
68. Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água da calha seja máxima?



69. Como deve ser escolhido o ponto P sobre o segmento AB de forma a maximizar o ângulo θ?



70. Uma pintura em uma galeria de arte tem altura h e está pendurada de forma que o lado de baixo está a uma distância d acima do olho de um observador (como na figura). A que distância da parede deve ficar o observador para obter a melhor visão? (Em outras palavras, onde deve ficar o observador de forma a maximizar o ângulo θ subentendido em seu olho pela pintura?)



71. Encontre a área máxima do retângulo que pode ser circunscrito em torno de um dado retângulo com comprimento L e largura W. [*Sugestão*: Expresse a área como função de um ângulo θ.]

72. O sistema vascular sanguíneo consiste em vasos sanguíneos (artérias, arteríolas, capilares e veias) que transportam o sangue do coração para os órgãos e de volta para o coração. Esse sistema deve trabalhar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue. Em particular, essa energia é reduzida quando a resistência do sangue diminui. Uma das Leis de Poiseuille dá a resistência R do sangue como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

onde L é o comprimento do vaso sanguíneo; r, o raio; e C é uma constante positiva determinada pela viscosidade do sangue. (Poiseuille estabeleceu experimentalmente essa lei, mas ela também segue da Equação 8.4.2.) A figura mostra o vaso sanguíneo principal com raio r_1 ramificando a um ângulo θ em um vaso menor com raio r_2.