MAT1513 - Laboratório de Matemática – Noturno 2014

TG5 – A função logarítmica de base a

Colocando x como variável independente e y como variável dependente, definimos então a função g_a, inversa da função $f(x) = a^x$ inicial:

$$\boxed{\begin{array}{l} g_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ \quad x \ \mapsto \text{expoente}_a x \end{array}}$$

sempre que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Utilizando a notação da função g_a, nos exemplos do TG4, temos:

$8 \mapsto \text{expoente}_2 8$

$25 \mapsto \text{expoente}_5 25$

$16 \mapsto \text{expoente}_{1/2} 16$

ou ainda,

$g_2(8) = 3$

$g_5(25) = 2$

$g_{1/2}(16) = -4$

Propriedade: A função $g_a(x) = \text{expoente}_a x$ é:

a) estritamente crescente se $a > 1$

b) estritamente decrescente se $0 < a < 1$

Prova:

a) Sendo $a > 1$, precisamos mostrar que $x_1 < x_2 \Rightarrow g_a(x_1) < g_a(x_2)$

Observemos que $\text{expoente}_a(x_1) - \text{expoente}_a(x_2) = \text{expoente}_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ pela propriedade da divisão de potências de mesma base a.

Agora, como $x_1 < x_2$, temos $\frac{x_1}{x_2} < 1$ e então $\text{expoente}_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0$, uma vez que $a > 1$.

(**Exercício 1**: Justifique)

Logo,

$$\text{expoente}_a(x_1) - \text{expoente}_a(x_2) = \text{expoente}_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0$$

isto é,

$g_a(x_1) < g_a(x_2)$

e, neste caso, a função g_a é estritamente crescente.

ii) Sendo $0 < a < 1$, precisamos mostrar que $x_1 < x_2 \Rightarrow g_a(x_1) > g_a(x_2)$

Neste caso, considerando $x_1 < x_2$, temos $\frac{x_1}{x_2} < 1$ e então $\text{expoente}_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) > 0$, uma vez que $0 < a < 1$. (**Exercício 2**: Justifique)
Logo,

$$\text{expoente}_a(x_1) - \text{expoente}_a(x_2) = \text{expoente}_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) > 0$$

isto é,

$$g_a(x_1) > g_a(x_2)$$

e, neste caso, a função g_a é estritamente decrescente.

Assim, sempre que $a > 0$ e $a \neq 1$, a função

$$\begin{aligned} g_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{expoente}_a x \end{aligned}$$

é, portanto, bijetora sobre a imagem. (**Exercício 3**: Justifique)

Tendo em vista as propriedades da multiplicação e da divisão de potências de mesma base, convém destacar que a função g_a, fixada a base *a*, $a > 0$ e $a \neq 1$, verifica as seguintes propriedades:

$$g_a(x_1.x_2) = g_a(x_1) + g_a(x_2)$$

e

$$g_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = g_a(x_1) - g_a(x_2)$$

Exercício 4: Mostre as duas propriedades acima.

Finalmente, para cada $a > 0$ e $a \neq 1$,

$$\boxed{\begin{aligned} g_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{expoente}_a x \end{aligned}}$$

é a **função logarítmica** de base *a*, que é denotada da seguinte maneira:

$$\boxed{g_a = \log_a}$$

para $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exercício 12: Encontre os valores abaixo, justificando a resposta:

a) $g_2(32)$

b) $g_{\sqrt{2}}(32)$

c) $g_{1/2}(32)$

d) Reescreva os diferentes itens utilizando a notação $\log_a$.

d) Crie outros exemplos.