MAT1513 - Laboratório de Matemática – Noturno 2014

TG4 – Potências e funções exponenciais

Neste texto temos como primeiro objetivo entender a operação de potenciação nos diferentes contextos numéricos, a fim de chegar à definição da função exponencial numa dada base *a*.

a) Potências

i) Inicialmente, vamos examinar a^n onde o expoente *n* é um número natural, isto é, $n \in \mathbb{N}$. O número *a* pode ser um número positivo, negativo ou mesmo nulo. Definimos:

$a^n = a.a.a.....a$

onde o produto envolve *n* fatores iguais a *a*.

É possível mostrar que:

$a^{n_1}.a^{n_2} = a^{n_1+n_2}$

e

$a^{n_1} : a^{n_2} = a^{n_1-n_2}$ para $n_1 > n_2$.

Consequentemente,

$a^0 = 1$

a fim de que a operação de divisão seja respeitada.

Uma observação a ser considerada é que vamos colocar

$0^0 = 1$

por convenção.

ii) Examinemos agora o caso que o expoente é um número inteiro negativo, pois o caso em que o expoente é inteiro e positivo já foi considerado no parágrafo anterior. Assim, definimos, para $m \in \mathbb{Z}_-$, sendo $\mathbb{Z}_-$ o conjunto dos números inteiros não positivos:

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}$$

onde $-m$ é agora uma número inteiro não negativo (Por quê?).

Evidentemente,

$$a^{m_1}.a^{m_2} = \frac{1}{a^{-m_1}} \cdot \frac{1}{a^{-m_2}} = \frac{1}{a^{-m_1-m_2}} = \frac{1}{a^{-(m_1+m_2)}} = a^{m_1+m_2}$$

e, de maneira análoga,

$a^{m_1} : a^{m_2} = a^{m_1-m_2}$

Nesta situação, o número *a* pode ser um número positivo ou negativo, não podendo todavia ser 0.

iii) A situação seguinte é aquela em que o expoente é um número racional da forma $\frac{p}{q}$ onde *p* e *q* são ambos inteiros, sendo $q \neq 0$. Definimos

$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$
desde que o segundo membro exista em $\mathbb{R}$.
No caso do expoente racional observamos que poderíamos analisar a existência de $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ de acordo com a paridade de p e q, juntamente com o sinal de a. Entretanto, para o que nos propomos aqui, vamos assumir que o número a é não negativo, o que elimina todas as análises que seriam necessárias se assim não fosse.
Vale observar que teríamos uma dificuldade adicional se a pudesse ser negativo, pois, por exemplo, $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$ não existe em $\mathbb{R}$, enquanto que $(-2)^{2/4} = \sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt[4]{4}$ existe e é um número real.
A partir de agora, portanto, vamos assumir a base a é um número estritamente positivo.

iv) Finalmente, para analisar o caso em que o expoente de a é um número real α, precisamos observar que
i) se esse número é racional estamos na situação anterior;
ii) se esse número é irracional, existe uma sequência de números racionais que para ele converge. Para entender esse fato, imaginemos o caso em que $\alpha = \sqrt{2}$. Pois bem, pode-se provar que a sequência: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;... converge para $\sqrt{2}$.
A partir desse exemplo, é possível perceber que, dado um número irracional, construir uma sequência de números racionais que para ele converge não é difícil. De fato, basta pensar no número irracional escrito em sua expansão decimal, com um número infinito e não periódico de casas decimais; a fim de construir a sequência acima mencionada, basta considerar cada termo da sequência, recursivamente, como sendo o anterior com a casa decimal seguinte da expansão do número irracional.
Sendo pois $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, isto é, α um número irracional, seja então $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha$, onde $r_n \in \mathbb{Q}$, para todo n natural.

Exercício 1:
Exiba dois números irracionais e, para cada um deles, apresente uma sequência de números racionais que converge para o número irracional considerado.

Agora, definimos a^α como sendo o limite da sequência a^{r_n} onde $r_n \in \mathbb{Q}$, que foi definido acima.

b) A função exponencial

Tendo analisado todas as possibilidades para o expoente do número real estritamente positivo a, podemos agora definir uma função de domínio real
$f(x) = a^x$
onde a é um número real estritamente positivo e $a \neq 1$, pois o caso $a = 1$ não tem interesse uma vez que a função seria constante e igual a 1.
A função f é então

$$\boxed{\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}}$$

e, para todo $a > 0$, o valor $f(x)$ sempre será um número estritamente positivo, isto é, a função *f* tem imagem $\text{Im}\, f = \mathbb{R}_+^*$.

Propriedade: A função $f(x) = a^x$ é
a) estritamente crescente se $a > 1$
b) estritamente decrescente se $0 < a < 1$
Prova:
a) Sendo $a > 1$, precisamos mostrar que $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
Agora $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$
e então $a^{x_1 - x_2} < 1$ (**Exercício 2**: Justifique esse último fato.)
ou seja $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} < 1$ isto é, $a^{x_1} < a^{x_2}$
e, neste caso, a função *f* é estritamente crescente.
b) Sendo $0 < a < 1$, precisamos mostrar que $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
De fato, se $0 < a < 1$ então $\dfrac{1}{a} > 1$ e, portanto, por a), $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\dfrac{1}{a}\right)^{x_2}$ ou
$\dfrac{1}{a^{x_1}} < \dfrac{1}{a^{x_2}}$
isto é,
$\dfrac{a^{x_2}}{a^{x_1}} < 1$ ou seja $a^{x_1} > a^{x_2}$
e, neste caso, a função *f* é estritamente decrescente.

Consequência: A função $f(x) = a^x$, para todo *a* estritamente positivo e diferente de 1, que a cada valor da variável *x* associa o valor da potência de base *a*, é injetora (**Exercício 3**: Justifique) e, portanto, bijetora sobre a imagem. Logo é inversível (**Exercício 4**: Justifique).

Assim, podemos definir a função inversa de *f* que, a cada valor da potência de base *a*, $a > 0$ e $a \neq 1$, associa o valor do expoente, isto é,

$$\boxed{\text{a cada } y \in \mathbb{R}_+^*,\ y = a^x,\ \text{ associa } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \text{expoente}_a(y)}$$

ou seja, *x* é o expoente da base *a* que produz *y*.

Por exemplo,
i) $\text{expoente}_2(8) = 3$
ii) $\text{expoente}_5(25) = 2$
iii) $\text{expoente}_{1/2}(16) = -4$
e assim por diante.

Exercício 5: Crie outros exemplos, calculando a função definida acima em outros números reais estritamente positivos.