

Respostas

Tetraedro (atividades 1, 3, 5, 6):

1. 4, 6, 4 2. 3, 3 3. 0, 4, 1 4. 2, 0, 2 5. 0, 3 6. 6, 4

Octaedro (atividades 2, 4, 5):

1. 6, 12, 8 2. 4, 4 3. 1, 6, 4 4. 2, 2, 4 5. 1, 6 6. 12, 6

Cubo (atividade 6):

1. 8, 12, 6 2. 3, 3 3. 3, 4, 4 4. 2, 2, 2 5. 1, 4 6. 12, 8

Tetraedro em tetraedro (atividade 3):

7. 1, 0, 5 8. 1, 0, 5 9. 0, 1, 3 10. 0, 1, 3 11. 0, 2, 2 12. 0, 2, 2

Cubo em octaedro (atividade 4):

7. 0, 0, 12 8. 0, 0, 12 9. 0, 0, 12 10. 0, 0, 12 11. 0, 2, 4 12. 0, 0, 8

Octaedro em tetraedro (atividade 5):

7. 2, 4, 6 8. 1, 2, 3 9. 1, 1, 6 10. 1, 0, 3
11. 2, 2, 4 12. 1, 1, 2

Tetraedro em cubo (atividade 6):

7. 0, 3, 3 8. 0, 6, 6 9. 0, 0, 4 10. 0, 0, 6 11. 0, 0, 4 12. 1, 1, 4

REFERÊNCIA

Pohl, Victoria. *How to Enrich Geometry Using String Designs*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1986.

14

Secções cônicas: um tópico interessante e enriquecedor

ROSELYN TEUKOLSKY

É um prazer e um desafio ensinar alunos para quem diversão significa explorar a secção áurea. Para eles, felicidade é a criação de uma demonstração primorosa e original. Numa classe formada por alunos com essa aptidão o professor não precisa limitar-se a servir o trivial da geometria euclidiana e da geometria sólida; pode oferecer um banquete que satisfaça ao mais exigente *gourmet*.

Tradicionalmente, dá-se pouca importância às secções cônicas nos currículos escolares. É especialmente lamentável não se oferecer esse tópico a alunos talentosos que têm habilidade e argúcia para apreciar sua magia geométrica. Minha proposta é que as secções cônicas sejam focalizadas como um *gran finale* de um rico curso de geometria. Belo e fascinante em seus muitos aspectos, esse assunto oferece uma rara oportunidade para se mesclar geometria analítica com geometria sólida, lugares geométricos, triângulos semelhantes, círculos e esferas e assim por diante — uma coletânea de resultados pouco comuns e inesperados. Mostra-se através das cônicas que a geometria é parte de um todo consistente, e não uma disciplina isolada e esotérica.

O que se segue é uma unidade destinada a alunos talentosos em que as cônicas são definidas e geradas de várias maneiras. O tema unificador é,

Gostaria de agradecer a Avery Salomon por ter despertado meu interesse pelas secções cônicas, a Bill Halton pelas idéias valiosas e pelas discussões e a Saul Teukolsky pela ajuda com o manuscrito.

então, mostrar que todas as definições são matematicamente equivalentes. Conforme se avança, o objetivo é intrigar os alunos: como é possível que curvas geradas de maneiras tão diferentes possam levar às mesmas secções cônicas? No final, eles ficarão encantados com a teia de interconexões.

Introdução

Diz a lenda que as secções cônicas originaram-se em Atenas, por volta do ano 430 a.C., como resultado de uma peste. Através do oráculo de Delfos, Zeus anunciou aos sofridos cidadãos que o fim da peste estava condicionado à construção de um altar a Apolo cujo tamanho fosse o dobro daquele já existente, que tinha a forma de um cubo. Todas as tentativas para dobrar o cubo com régua e compasso fracassaram. Por volta do ano 340 a.C. Menaecmo encontrou duas soluções usando cônicas. O destino do altar não nos interessa aqui. A questão é saber como eram descritas as cônicas primitivamente. Os escritos de Menaecmo perderam-se. Contudo, segundo Gêmino, os antigos só usavam cones retos para definir secção cônica. Destas, distinguiram três tipos, conforme a secção meridiana fosse um ângulo agudo, um ângulo reto ou um ângulo obtuso (Heath, 1921, p. 111). Obtinham-se então as três secções cônicas seccionando-se a superfície do cone com um plano perpendicular a uma de suas geratrizes (fig. 14.1).

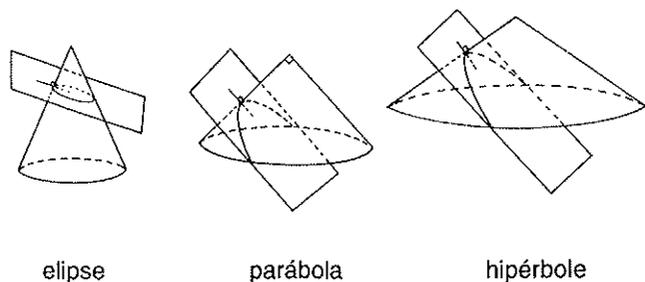


Fig. 14.1

Apolônio de Perga (262-200 a. C.) deixou um tratado respeitável sobre cônicas, em oito livros. Seu grande avanço foi ter conseguido gerar todas as cônicas a partir de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de intersecção (fig. 14.2). Atribui-se a Apolônio, também, o mérito de ter cunhado os nomes *parábola*, *elipse* e *hipérbole*.

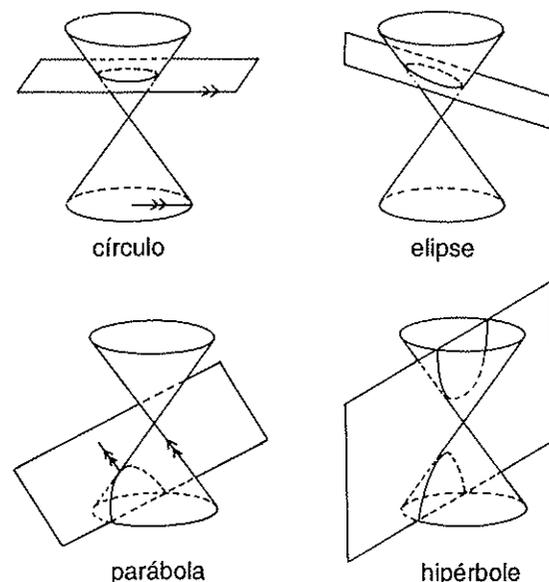


Fig. 14.2

Se o plano de intersecção passa pelo vértice V do cone, obtém-se uma *cônica degenerada*. Uma cônica degenerada pode ser simplesmente um ponto, uma reta ou um par de retas concorrentes. Aqui consideraremos apenas cônicas não degeneradas.

Secções de um cone

Vamos examinar mais de perto a natureza de uma cônica não degenerada (Bridge, 1831, p.10). Em cada exemplo consideraremos um cone circular reto cortado pelos seguintes planos (ver figs. 14.3, 14.5):

- CPD , que é um plano qualquer paralelo à base do cone.
- BEG , que é perpendicular à base. Sua intersecção com a superfície do cone é o $\triangle BEG$. Observe-se que BEG intercepta as duas bases circulares segundo seus diâmetros.
- O plano de intersecção APO , que é perpendicular ao plano BEG . Se APO é paralelo ao plano que contém \overleftrightarrow{BE} e que é tangente ao cone em \overleftrightarrow{BE} , então a intersecção de APO com a superfície do cone é uma parábola (fig. 14.3). Se APO corta as retas \overleftrightarrow{BG} e \overleftrightarrow{BE} da secção

meridiana EBG , a intersecção é uma elipse (fig. 14.4). Se APO não é paralela ao plano tangente que contém \overleftrightarrow{BE} e não intercepta \overleftrightarrow{BE} , a intersecção é uma hipérbole (fig. 14.5).

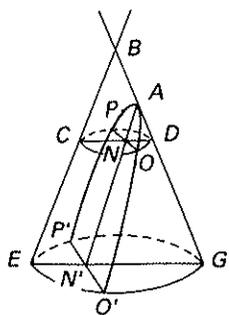


Fig. 14.3

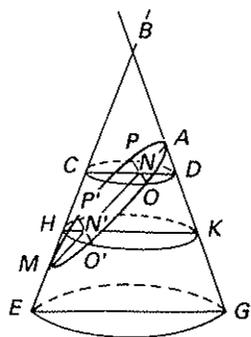


Fig. 14.4

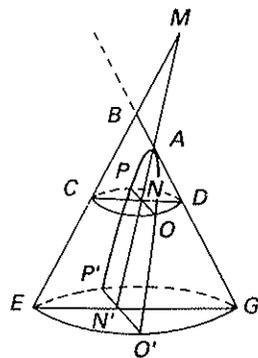


Fig. 14.5

Observe que em cada caso a intersecção dos planos APO e BEG é $\overleftrightarrow{ANN'}$, que é um eixo de simetria da cônica. O ponto A é um vértice. Por perpendicularismo de planos, $\overline{PNO} \perp$ plano BEG , $\overline{PNO} \perp \overleftrightarrow{ANN'}$ e $\overline{PNO} \perp \overline{CND}$.

Vamos nos referir à figura 14.3 e à parábola. Novamente, por perpendicularismo de planos, $\overline{P'N'O'}$ é perpendicular ao plano BEG , a $\overleftrightarrow{ANN'}$ e a $\overline{EN'G}$. Usando algumas propriedades das cordas de um círculo, vemos que $PN = NO$, $P'N' = N'O'$.

Como o triângulo PCD está inscrito no semicírculo de diâmetro CD , para a altura PN vale a relação $CN \cdot ND = PN^2$.

Dai

$$ND = \frac{PN^2}{CN} \quad (1)$$

Analogamente,

$$N'G = \frac{P'N'^2}{EN'} \quad (2)$$

$CNN'E$ é um paralelogramo, pois os dois pares de lados opostos são paralelos. Portanto, $CN = EN'$. Substituindo em (2) obtém-se

$$N'G = \frac{P'N'^2}{CN} \quad (3)$$

Partindo do fato de que $\triangle AND \sim \triangle AN'G$ e substituindo os resultados de (1) e (3), chegamos a

$$\frac{AN}{AN'} = \frac{ND}{N'G} = \frac{PN^2 / CN}{P'N'^2 / CN} = \frac{PN^2}{P'N'^2}$$

Assim, a parábola se caracteriza pela seguinte propriedade: se seu vértice é A , se P é um ponto qualquer da curva e um segmento $\overline{PN} \perp \overleftrightarrow{AN}$, então AN é diretamente proporcional a PN^2 .

Consideremos agora a figura 14.4 e a elipse. O ponto M de \overleftrightarrow{BE} é um segundo vértice da elipse. Consideremos um outro plano, $HP'K$, paralelo à base e que intercepta o plano APO , conforme se mostra na figura 14.4. Então $\overline{P'N'O'} \perp \overleftrightarrow{ANN'}$ e $\overline{P'N'O'} \perp \overline{HK}$. Tal como para a parábola,

$$NC \cdot ND = PN^2 \text{ e } HN' \cdot N'K = P'N'^2 \quad (4)$$

Como $\triangle AND \sim \triangle AN'K$ e $\triangle MNC \sim \triangle MN'H$,

$$\frac{AN}{AN'} = \frac{ND}{N'K} \text{ e } \frac{NM}{N'M} = \frac{NC}{N'H};$$

então

$$\frac{AN}{AN'} \cdot \frac{NM}{N'M} = \frac{ND}{N'K} \cdot \frac{NC}{N'H}$$

Substituindo-se (4) nesta última igualdade obtém-se

$$\frac{AN \cdot MN}{AN' \cdot N'M} = \frac{PN^2}{P'N'^2}$$

Assim, uma elipse se caracteriza pela seguinte propriedade: se os pontos A e M são os extremos de seu eixo maior e P é um ponto qualquer da curva para o qual $\overline{PN} \perp \overleftrightarrow{AN}$, então $AN \cdot NM$ é diretamente proporcional a PN^2 .

Por fim, vamos nos referir à figura 14.5 e à hipérbole. Suponhamos que o plano APO intercepte \overleftrightarrow{EB} em M . (Este último é o ponto de \overleftrightarrow{EB} em que o

plano APO corta a folha superior do cone para formar o segundo ramo da hipérbole.) Como anteriormente, uma vez que

$$\triangle AND \sim \triangle AN'G \text{ e } \triangle MNC \sim \triangle MN'E,$$

então

$$\frac{AN}{AN'} = \frac{ND}{N'G} \text{ e } \frac{NM}{N'M} = \frac{NC}{N'E}.$$

Daí

$$\frac{AN \cdot NM}{AN' \cdot N'M} = \frac{ND \cdot NC}{N'G \cdot N'E} = \frac{PN^2}{P'N'^2}.$$

Assim, a hipérbole se caracteriza pela seguinte propriedade: se A e M são os vértices e P é um ponto qualquer da curva para o qual $\overline{PN} \perp \overline{AN}$, então $AN \cdot NM$ é diretamente proporcional a PN^2 .

Distâncias focais

Consideremos agora dois pontos fixos, F e F' . Desejamos examinar o lugar geométrico de todos os pontos P de um plano dado para os quais $FP + F'P$ é constante. Para isso, vamos prender as extremidades de um pedaço de barbante em dois pinos fixados na lousa em F e F' e traçar a curva no quadro com o giz tensionando o barbante de modo a mantê-lo sempre esticado (fig. 14.6). Seja $2c$ a distância FF' e seja $2a$ o comprimento do barbante. Assim, para todos os pontos P do lugar, $FP + F'P = 2a$. Além disso, se P_1 e P_2 são os vértices da curva, então $P_1P_2 = 2a$; de fato, quando a posição do giz é P_2 , o comprimento do barbante pode ser expresso por $2a = FF' + 2F'P_2 = FF' + F'P_2 + FP_1 = P_1P_2$.

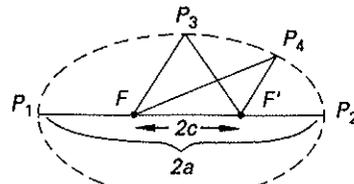


Fig. 14.6

A curva obtida certamente se parece com uma elipse. Mas seus pontos têm de fato a propriedade demonstrada acima, envolvendo proporcionalidade, para a secção elíptica da superfície de um cone? Uma maneira de investigar isso é deduzir uma equação para a curva. Escolhamos os eixos conforme a figura 14.7 e seja $P(x,y)$ um ponto da curva. Então $FP + F'P = 2a$; portanto,

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

Passando o segundo radical para o segundo membro e elevando ao quadrado os dois membros, temos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Simplificando, obtemos

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado os dois membros e simplificando, chegamos a

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2. \quad (5)$$

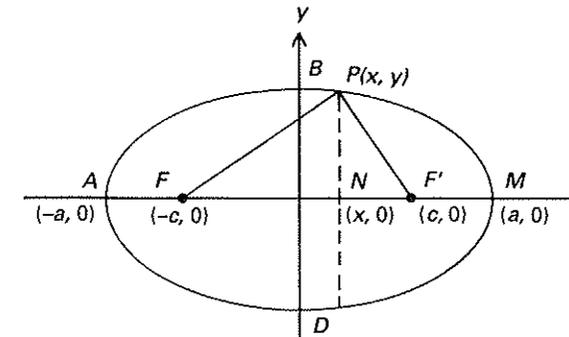


Fig. 14.7

Neste ponto, relembremos o que estamos tentando descobrir: vale para essa curva a propriedade da proporcionalidade $AN \cdot NM = k \cdot PN^2$, onde k é uma constante? Da equação (5),

$$(a^2 - c^2)(a^2 - x^2) = a^2y^2.$$

$$\therefore (a+x)(a-x) = \frac{a^2}{a^2 - c^2} y^2.$$

Como $AN = a+x$, $NM = a-x$, $PN = y$ e $a^2/(a^2 - c^2)$ é constante para todas as posições de P , mostramos que $AN \cdot NM = k \cdot PN^2$, e a curva é uma elipse. (Observe-se que a propriedade da proporcionalidade caracteriza *unicamente* a elipse; para uma dada curva que satisfaz essa propriedade, podem-se

escolher eixos como na figura 14.7 e deduzir a equação (5). Como a equação é do segundo grau, suas raízes determinam apenas dois lugares $y = y(x)$. Mas trata-se simplesmente dos ramos superior e inferior da elipse. Do mesmo modo, a parábola e a hipérbole caracterizam-se unicamente por suas propriedades da proporcionalidade.)

Vários aspectos interessantes da elipse podem ser observados aqui. Na equação (5) façamos $b^2 = a^2 - c^2$. (Como $a > c$, isso é válido.) Então $b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2$, e dividindo-se os dois membros por a^2b^2 obtém-se a equação reduzida da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Note-se que $y = 0$ implica $x = \pm a$ e $x = 0$ implica $y = \pm b$. Assim, as coordenadas dos pontos B e D são $(0, b)$ e $(0, -b)$, respectivamente. \overline{AM} é o eixo maior e \overline{BD} o eixo menor da elipse. F e F' chamam-se *focos* da elipse, e $e = c/a$ chama-se *excentricidade* da elipse. Como $c < a$, então $e < 1$. $c \rightarrow 0$, quando $b \rightarrow a$; portanto $e \rightarrow 0$, formando uma elipse "mais gorda". Para $c = 0$ e $e = 0$ obtém-se um círculo com ambos os focos no mesmo ponto, o centro do círculo.

Uma análise semelhante pode ser feita para a hipérbole. Consideremos novamente dois pontos fixos F e F' . Pretendemos achar o lugar geométrico dos pontos P do plano para os quais $|FP - F'P|$ é uma constante. A construção mecânica é bastante trabalhosa, mas pode ser feita com três pares de mãos hábeis (Besant, 1895).

Tome uma vareta e um pedaço de barbante cujo comprimento seja menor que o da vareta. Fixe uma das extremidades do barbante numa das extremidades da vareta, que indicaremos por L , e a outra extremidade no quadro, em F . Fixe a outra extremidade da vareta no quadro, em F' . Assim, a vareta é móvel no plano do quadro (fig. 14.8). Tensione o barbante com um pedaço de giz, mantendo-o sempre esticado e com uma parte, \overline{CL} , em contato com a vareta. O giz traçará uma curva conforme se mostra na figura 14.8b. Note que, para qualquer posição C do giz,

$$\begin{aligned} CF' - CF &= LC + CF' - (CF + LC) \\ &= \text{comprimento da vareta} - \text{comprimento do barbante} \\ &= \text{uma constante} \\ &= 2a, \text{ para algum } a > 0. \end{aligned}$$

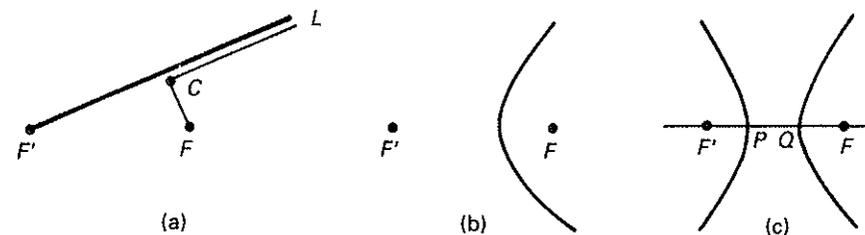


Fig. 14.8

Faça agora a construção idêntica (usando os mesmos F e F') com um pedaço de barbante que exceda em $2a$ o comprimento da vareta. Essas duas construções fornecem os dois ramos do que parece ser uma hipérbole. Note que, para o ponto P mostrado na figura 14.8c,

$$PF - PF' = PF - QF = PQ = 2a.$$

Os pontos dessa curva têm a propriedade da proporcionalidade já provada para a hipérbole sobre a superfície de um cone? Mostrar que eles a têm é um excelente exercício para os alunos fazerem sozinhos, uma vez que as manipulações algébricas são análogas às que se usaram para a elipse.

Eles deverão considerar mais uma vez, $FF' = 2c$ e escolher os eixos como na figura 14.9.

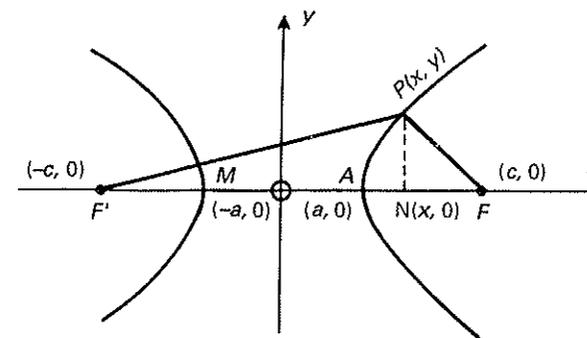


Fig. 14.9

Então, usando o fato de que $|PF - PF'| = 2a$, poderão deduzir a equação

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2(c^2 - a^2) = a^2y^2. \quad (6)$$

A seguir deverão mostrar que

$$AN \cdot NM = k \cdot PN^2.$$

Portanto a curva é uma hipérbole.

Agora, a definição $c^2 - a^2 = b^2$ na equação (6) levará à forma reduzida da equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

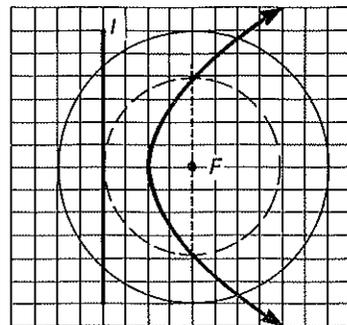
Mais uma vez, a excentricidade é $e = c/a$. Observe-se que, neste caso, e é maior do que 1.

Temos agora uma definição alternativa para a elipse e para a hipérbole. Sejam F e F' dois pontos fixos chamados focos. O conjunto dos pontos P de um dado plano para os quais $FP + F'P$ é uma constante é uma elipse. O conjunto dos pontos para os quais $|FP - F'P|$ é uma constante menor que FF' é uma hipérbole.

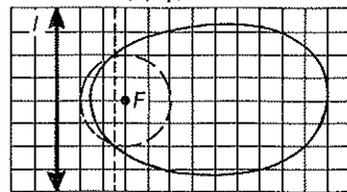
Foco-diretriz

Consideremos agora um lugar geométrico diferente. Uma reta l e um ponto F que não pertence a l determinam um plano; um ponto move-se nesse plano de tal maneira que a razão entre sua distância a F e a l é sempre a mesma. Que tipo de curva P descreve?

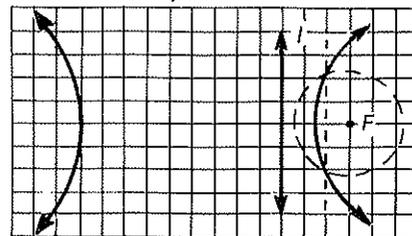
Denotemos a distância ao ponto fixo F por p e a distância à reta por d . Há três casos possíveis: $p/d = 1$, $p/d < 1$ e $p/d > 1$. Cada aluno deveria, portanto, traçar três gráficos diferentes. Fazendo isso, eles lembrariam que num dado plano o lugar dos pontos a uma dada distância de uma reta é um par de retas paralelas, uma de cada lado da reta dada, enquanto o lugar dos pontos a uma dada distância de um ponto é um círculo. A intersecção desses dois lugares satisfaz as duas condições.



(a) $p/d = 1$.



(b) $p/d = 3/4 < 1$.



(c) $p/d = 4/3 > 1$.

Fig. 14.10

Os gráficos obtidos são parecidos com os da figura 14.10.

Tudo indica que temos outra definição de parábola, elipse e hipérbole. Poderemos demonstrar que essa definição é coerente com o que foi visto antes?

Começaremos com a parábola. Usando uma reta l , um ponto fixo F e a nova definição, deduziremos a equação da curva. Escolhamos os eixos, como se mostra na figura 14.11. O eixo y é paralelo a l e equidistante de F e l . Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da curva. Então

$$\begin{aligned} PM &= PF \\ \therefore x + a &= \sqrt{(x - a)^2 + y^2} \\ \therefore x^2 + 2ax + a^2 &= (x - a)^2 + y^2 \\ \therefore y^2 &= 4ax \end{aligned}$$

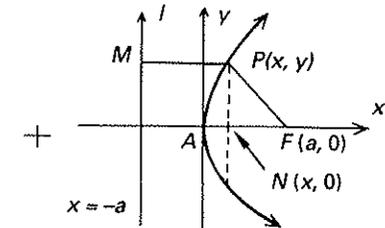


Fig. 14.11

Como $AN = x$, $PN = y$ e $4a$ é constante, então AN é proporcional a PN^2 , o que satisfaz a condição da parábola sobre a superfície do cone.

Quanto à curva que se assemelha a uma elipse, será que podemos mostrar que é uma elipse, provando que vale para ela a propriedade da "soma das distâncias focais", enunciada no parágrafo anterior? Nota-se, a partir do gráfico, que a curva tem um eixo de simetria por F que é perpendicular a l . Esse eixo intercepta l em D e a curva, digamos, em A (fig. 14.12). Tomemos o ponto F' e a reta l' , conforme a figura, de modo que $AF = BF'$ e $AD = BC$. Isso assegura que, para qualquer ponto P da curva, p/d é o mesmo com respeito a F' e l' . Assim,

$$\frac{PF}{PM} = k \quad \text{e} \quad \frac{PF'}{PN} = k.$$

Portanto,

$$PF + PF' = kPM + kPN = kMN, \text{ que é constante.}$$

Portanto, a curva é uma elipse com focos F e F' .

Além disso, usando as quantidades a e c anteriormente definidas, podemos preencher com comprimentos, conforme mostra a figura 14.13. Com respeito ao ponto A :

$$AF/AD = AF'/AC$$

$$\therefore \frac{p}{d} = \frac{p+2c}{2a+d}$$

$$\therefore 2ap + pd = pd + 2cd$$

$$\therefore p/d = c/a$$

= e, que é a excentricidade da elipse.

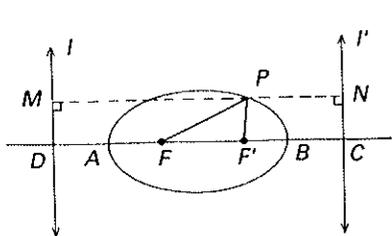


Fig. 14.12

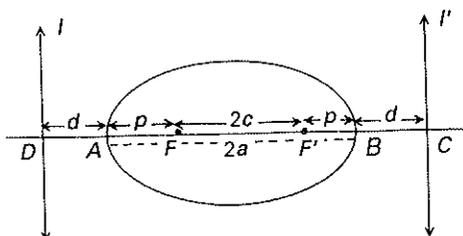


Fig. 14.13

A esta altura os alunos já saberão que uma análise semelhante está reservada para a curva graficamente parecida com a hipérbole e correspondente a $p/d > 1$. Talvez possam tentar fazê-la como tarefa de casa.

Eles obteriam um diagrama como o da elipse, com as distâncias marcadas conforme se mostra na figura 14.14:

$$\frac{PF}{PM} = k \quad \text{e} \quad \frac{PF'}{PN} = k.$$

Assim,

$$|PF' - PF| = kPN - kPM = kMN, \text{ que é constante.}$$

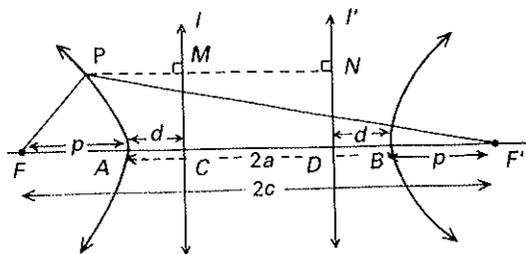


Fig. 14.14

Portanto, a curva é uma hipérbole de focos F e F' . Também,

$$AF/AC = AF'/AD$$

$$\therefore \frac{p}{d} = \frac{2c-p}{2a-d}$$

$\therefore p/d = c/a = e$, que é a excentricidade.

Temos agora uma nova definição de cônica: Dada uma reta l , chamada diretriz, e um ponto F que não está em l , chamado foco, uma secção cônica é o lugar geométrico dos pontos P para os quais a razão

$$\frac{\text{distância de } P \text{ a } F}{\text{distância de } P \text{ a } l}$$

é uma constante. Essa constante chama-se excentricidade e da cônica, que é uma elipse se $0 < e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$.

Papel-manteiga

Para um tipo de aula diferente, dê a cada aluno três folhas de papel-manteiga, de cerca de 30 cm por 22,5 cm. Na primeira folha eles devem traçar uma reta e marcar um ponto fora dessa reta. A seguir, devem dobrar a folha de muitas maneiras diferentes (tantas quantas forem possíveis, em cerca de cinco minutos), de modo que o ponto considerado sempre se sobreponha a diferentes pontos da reta. Cada dobra deverá ser gravada no papel como uma linha visível, e logo aparecerá uma imagem.

Na segunda folha de papel-manteiga eles devem fazer um círculo de cerca de 10 cm de diâmetro e tomar um ponto, diferente do centro, no interior do círculo. Devem então dobrar a folha de tantas maneiras quantas forem possíveis, dentro do tempo permitido, fazendo com que o ponto tomado sempre se sobreponha a pontos da circunferência traçada.

Na terceira folha de papel podem fazer um outro círculo e repetir, com um ponto exterior a esse círculo, o mesmo procedimento anterior.

O efeito será fantástico ao se observar as folhas de papel-manteiga contra uma superfície escura: como num passe de mágica, nossas velhas amigas, a parábola, a elipse e a hipérbole, surgirão, lindamente emolduradas por envoltórias de tangentes (fig. 14.15).

O cone revisitado

Serão as nossas definições originais de parábola, elipse e hipérbole, como secções de uma superfície cônica, coerentes com as definições por distâncias focais e por focos e diretrizes (Besant, 1895)? E, em caso afirmativo, onde se localizam os focos e diretrizes com relação ao cone? Neste parágrafo nosso objetivo é achar (1) um ponto fixo e uma reta para as quais p/d é constante para todos os pontos da curva e (2) outro ponto fixo que, juntamente com o primeiro, satisfaça a definição por distâncias focais.

Consideremos um cone circular reto cortado por um plano OVQ perpendicular à base (fig. 14.19). \overrightarrow{OV} e \overrightarrow{OQ} são as semi-retas geradoras do cone. Suponhamos que o plano UAP intercepte o cone perpendicularmente ao plano OVQ . Indiquemos por \overrightarrow{AU} a intersecção dos planos VOQ e UAP ; a curva AP é a intersecção do plano UAP com a superfície cônica. Vamos inscrever uma esfera no cone, de modo que ela intercepte a superfície cônica segundo a circunferência EF e o plano UAP no ponto S . A intersecção do plano do círculo EF com o plano UAP é \overrightarrow{XK} . Observe que \overrightarrow{XK} é perpendicular ao plano VOQ .

Seja P um ponto qualquer da curva. Tracemos \overrightarrow{OP} , cortando EF no ponto que chamaremos de R . Tracemos \overrightarrow{SP} . Seja QP a secção circular por P paralela à base e suponhamos que ela corte o plano UAP em \overrightarrow{PN} . Assim, \overrightarrow{PN} é perpendicular a \overrightarrow{AN} e paralela a \overrightarrow{XK} . E $XKPN$ é um paralelogramo.

Como \overrightarrow{SP} , \overrightarrow{PR} , \overrightarrow{AE} e \overrightarrow{AS} são tangentes à esfera,

$$SP = RP = EQ, \quad (7)$$

$$AE = AS. \quad (8)$$

No plano OVQ , $\Delta QNA \sim \Delta EXA$. Portanto,

$$\frac{AN}{AX} = \frac{AQ}{AE}$$

$$\therefore \frac{AN + AX}{AX} = \frac{AQ + AE}{AE}$$

$$\therefore \frac{NX}{AX} = \frac{EQ}{AE}$$

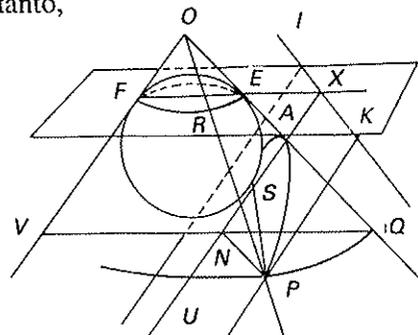


Fig. 14.19

$$\therefore \frac{EQ}{NX} = \frac{AE}{AX}$$

$$= \frac{AS}{AX}. \quad (9)$$

Mas, como $PK = NX$, de (7) e (9) decorre que

$$\frac{SP}{PK} = \frac{AS}{AX}. \quad (10)$$

AS/AX é uma constante, independentemente da escolha de P . Portanto, a curva AP é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, dependendo de AS ser menor, igual a ou maior que AX . Em todos os casos S é um foco e l , intersecção do plano da curva com o plano de contato da esfera e do cone, é a diretriz correspondente. Consideremos um caso por vez.

Caso 1: a parábola

O plano UAP é paralelo a \overrightarrow{OV} . Então

$$\angle AXE = \angle OFE = \angle OEF = \angle AEX$$

e portanto ΔAEX é isósceles. Logo,

$$AS = AE = AX.$$

Então, em (10), $SP/PK = 1$ e a curva é uma parábola.

Caso 2: a elipse

O plano UAP corta \overrightarrow{OQ} e \overrightarrow{OV} em A e em A' , como mostra a figura 14.20. Compare-se a orientação do plano UAP nas figuras 14.19 e 14.20. Na figura 14.20 o plano foi "erguido". Assim, $\angle AEX > \angle FXA$.

$$\therefore AE < AX$$

$$\therefore AS < AX$$

Logo, em (10),

$$SP/PK = AS/AX < 1,$$

e a curva é uma elipse.

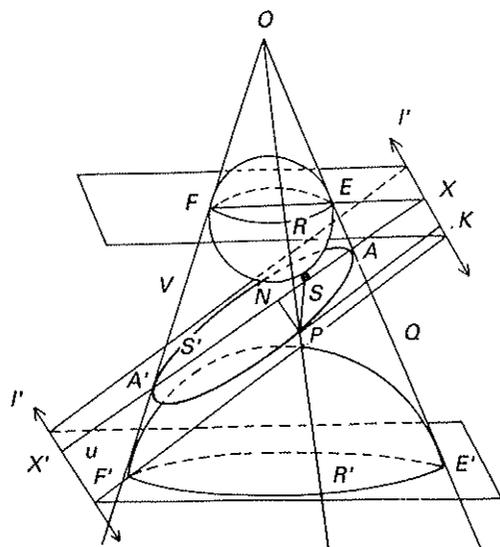


Fig. 14.20

Neste caso pode-se inscrever uma outra esfera no cone, interceptando sua superfície segundo a circunferência $E'F'$ e tocando o plano UAP em S' , como mostra a figura. Pode-se provar, como anteriormente, que S' é um foco e que a diretriz correspondente é I' , intersecção do plano UAP com o plano da circunferência $E'F'$. Será essa localização dos focos coerente com a definição por distâncias focais? Em outras palavras, pode-se provar que $PS + PS'$ é uma constante?

Usando a congruência dos segmentos de tangente a uma esfera por um ponto externo, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} PS + PS' &= PR + PR' \\ &= RR'. \end{aligned}$$

Esse resultado é constante para qualquer ponto P da elipse.

Caso 3: a hipérbole

Neste caso o plano UAP intercepta as duas folhas da superfície cônica, formando dois ramos, como mostra a figura 14.21.

Desta vez

$$\angle AEX < \angle AXF$$

$$\therefore AE > AX$$

$$\therefore AS > AX.$$

Substituindo em (10),

$$\frac{SP}{PK} = \frac{AS}{AX} > 1,$$

e portanto a curva é uma hipérbole. Neste caso outra esfera pode ser inscrita na folha superior do cone, interceptando sua superfície segundo a circunferência $E'F'$ e tocando o plano $UA'P'$ em S' . Tomando-se o ponto P' do ramo superior, segue-se que

$$SP'/P'K' = SA/AX.$$

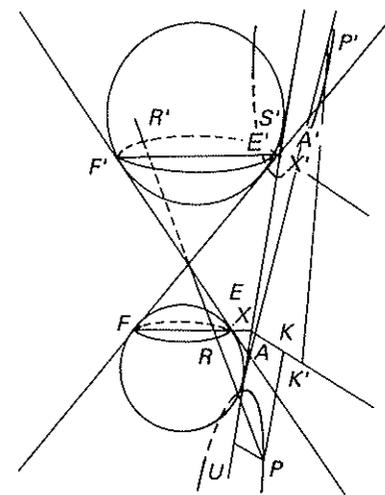


Fig. 14.21

Assim, S' é o outro foco da hipérbole, e a diretriz correspondente é a intersecção do plano UAP com o plano da circunferência $E'F'$.

Mais uma vez pode-se perguntar: as posições dos focos assim obtidas são coerentes com a definição por distâncias focais?

Em outras palavras, pode-se provar que $PS - PS'$ é uma constante? Usando a congruência dos segmentos de tangente, como no caso da elipse, temos

$$PS' - PS = PR' - PR = RR',$$

que é constante para qualquer ponto P da hipérbole.

Esse "método das esferas" para determinar o foco e a diretriz foi publicado pela primeira vez por Pierce Morton, do Trinity College, no primeiro volume de *Philosophical Transactions*, de Cambridge (Besant, 1895).

Eis alguns desafios interessantes para os alunos: tentar encontrar argumentos que justifiquem que (1) parábolas paralelas e (2) hipérbolas paralelas num dado cone têm a mesma excentricidade. E mais: tentar provar que, para um dado cone, planos paralelos determinam secções com a mesma excentricidade.

O cilindro

Um dos aspectos fascinantes das cônicas é que elas podem ser geradas de várias maneiras aparentemente desconexas mas que acabam se mostrando equivalentes do ponto de vista matemático. Os alunos que compreendem e apreciam esse fato gostarão de tentar resolver o problema que se segue, assim como o do próximo parágrafo.

- Prove que, quando um cilindro circular reto é seccionado por um plano não paralelo à sua base, a intersecção é uma elipse. Discuta as posições dos focos e diretrizes dessa elipse com relação ao cilindro.

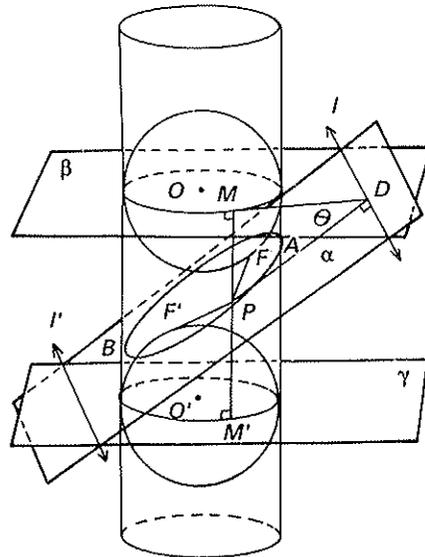


Fig. 14.22

Aqui está uma solução (fig. 14.22). Seja α o plano da secção e seja a curva APB a intersecção de α com a superfície cilíndrica. Consideremos as esferas tangentes a essa superfície e a α , sendo O e O' os centros das circunferências de tangência e F e F' os pontos de tangência com a esfera superior e com a esfera inferior, respectivamente. Sejam β e γ os planos que contêm as circunferências de centro O e O' , respectivamente. Sejam $\alpha \cap \beta = l$ e $\alpha \cap \gamma = l'$. Indiquemos por P um ponto qualquer da curva APB . Por P tracemos a reta perpendicular à base, na superfície do cilindro, e sejam M e M' , respectivamente, as intersecções dessa reta com as circunferências de centro O e O' . Seja θ a medida do diedro formado por α e β .

Para provar que a intersecção de α e a superfície do cilindro é uma elipse de focos F e F' , devemos provar que $PF + PF'$ é constante:

$$\begin{aligned} PF + PF' &= PM + PM' \\ &= MM', \text{ que é uma distância constante.} \end{aligned}$$

Para mostrar que l e l' são diretrizes, devemos provar que para cada uma

delas p/d é constante. Tracemos $\overline{PD} \perp l$. Tracemos \overline{MD} . Como $\overline{PM} \perp \beta$, o ΔPMD é retângulo. Daí

$$PF/PD = PM/PD = \text{sen } \theta.$$

Como θ é constante para qualquer posição de P , então $\text{sen } \theta$ é constante e portanto l é uma diretriz. Do mesmo modo prova-se que l' também é uma diretriz.

Projeção de uma circunferência

Aqui está um segundo problema para o aluno tentar resolver sozinho: mostrar que, quando se projeta uma circunferência sobre um plano que não é paralelo nem perpendicular ao plano da circunferência, a projeção é uma elipse (Besant, 1895).

Vejam uma solução (fig. 14.23). Seja $A'B'C'$ a projeção do círculo ABC . Seja \overline{PQ} uma corda paralela ao plano de projeção. Então sua projeção $\overline{P'Q'}$ é congruente a \overline{PQ} . Suponhamos que o diâmetro $\overline{ANC} \perp \overline{PQ}$ corte o plano de projeção em F . A projeção de \overline{ACF} é $\overline{A'C'F}$. Observe-se que $\overline{A'C'}$ bissecciona $\overline{P'Q'}$ segundo ângulos retos no ponto N' . Mostraremos agora que $A'N' \cdot C'N'$ é proporcional a $P'N'^2$.

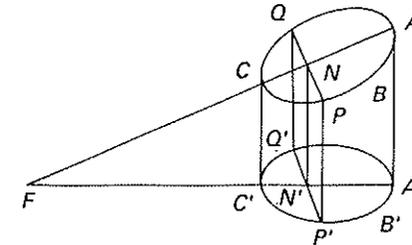


Fig. 14.23

Segundo o teorema da proporcionalidade básica, de Tales, no $\Delta AFA'$,

$$\frac{A'N'}{AN} = \frac{A'F}{AF}.$$

Devido à invariância das razões sob efeito de uma projeção,

$$\frac{C'N'}{CN} = \frac{A'F}{AF}, \therefore \frac{A'N'}{AN} \cdot \frac{C'N'}{CN} = \frac{A'F^2}{AF^2}.$$

Mas na circunferência

$$AN \cdot CN = PN^2 = P'N'^2, \quad \therefore \frac{A'N' \cdot C'N'}{P'N'^2} = \frac{A'F^2}{AF^2}$$

Como $A'F^2/AF^2$ é uma constante que independe de P , então

$$A'N' \cdot C'N' = kP'N'^2,$$

que é a propriedade característica de uma elipse.

Arca do tesouro

Este artigo oferece apenas um vislumbre da arca do tesouro das secções cônicas. As definições conduzem a uma abundância de propriedades. O *latus rectum* e sua longa lista de características interessantes nem chegaram a ser tocados. Tangentes, cordas, assíntotas e diâmetros fizeram aparições breves e quase não foram examinados. Além disso, vários fatos, singulares e desconexos, estão à espera de ser descobertos, como pequenas pedras preciosas:

- Se uma elipse tem seus focos nos extremos do diâmetro de um círculo e se a razão entre os eixos maior e menor da elipse é a secção áurea, então a área da elipse é igual à área do círculo.
- Antes de completar dezesseis anos de idade Pascal já provava que, quando se unem seis pontos de uma cônica, resulta um hexágono com a seguinte propriedade: os três pares de lados opostos se cortam em três pontos colineares (Bell, 1937, p. 84).
- O teorema de Brianchon: se a, b, c, d, e e f são tangentes a uma secção cônica, as retas que unem as intersecções de a com b e d com e, b com c e c com f e c com d e f com a são concorrentes (Bell, 1937, p. 238).

As aplicações práticas das cônicas provocam outras centelhas (Whitt, 1981, p. 15, 61 e 70):

- Dioclés, em seu livro *Sobre espelhos inflamáveis* (século II a.C.), propôs o seguinte: para se sacrificar uma vítima diante de uma multidão, ela deveria ser colocada no foco de um espelho parabólico, que acenderia um ponto inflamável visível no corpo. Não se sabe se essa idéia jamais foi posta em prática; todavia, a palavra latina *focus* significa lareira.

- Refletores parabólicos podem captar ondas de som de modo a permitir que se ouçam conversas distantes. Dispositivos dessa natureza já foram usados com sucesso para registrar cantos de pássaros e, provavelmente, no mundo da espionagem.
- A propriedade das “distâncias focais” de uma elipse pode ser utilizada para criar uma “galeria murmurante”. Numa sala de teto elíptico, quando alguém fala em voz baixa num dos focos, o som se reflete no outro foco, onde pode ser ouvido de maneira nítida. Conta-se que algumas igrejas da Europa usam galerias murmurantes como confessionários, ficando o padre num foco e o penitente no outro.
- O físico britânico Ernest Rutherford usou órbitas hiperbólicas de partículas α irradiadas para explorar o núcleo do átomo. Ele bombardeou uma barra fina de ouro com partículas α e verificou que algumas partículas se irradiavam, por amplos ângulos, em órbitas hiperbólicas. Se, como em geral se acreditava, a carga positiva do átomo se espalhasse, em vez de se concentrar no núcleo, esses amplos ângulos de irradiação não seriam observados.

As aplicações práticas das cônicas fazem delas um tópico importante e fascinante de ensino. A riqueza matemática dissimulada em suas curvas graciosas torna seu ensino imperativo para alunos talentosos. Conforme disse H. J. S. Smith, num discurso presidencial de 1873 dirigido à British Association for the Advancement of Science (Whitt, 1981, p. 1):

Se podemos usar os grandes nomes de Kepler e Newton para representar estágios do progresso das descobertas humanas, não seria exagero dizer que sem os tratados dos geômetras gregos sobre secções cônicas não teria existido um Kepler, sem Kepler não teria existido um Newton, e sem Newton não haveria ciência, no sentido moderno do termo.

REFERÊNCIAS

- Bell, E. T. *Men of Mathematics*. Nova Iorque: Simon & Schuster, 1937.
- Besant, W. H. *Conic Sections Treated Geometrically*. 9ª ed. Londres: George Bell, 1895.
- Bridge, G. *A Treatise on the Construction, Properties, and Analogies of the Three Conic Sections*. New Haven, Conn.: Durrie & Peck, 1831.
- Heath, Thomas L. *A History of Greek Mathematics*. Vol. 2. Oxford: Clarendon Press, 1921.
- Whitt, L. *The Standup Conic*. College Station, Tex.: Texas A & M University Press, 1981.