Matemática

Números para quê?

Coordenadores

Antonio Carlos Brolezzi

Élvia Mureb Sallum

Martha Salerno Monteiro

Elaboradores

Antonio Carlos Brolezzi

Martha Salerno Monteiro

1 módulo

Nome do aluno ______________________________

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Governador: *Geraldo Alckmin*

Secretaria de Estado da Educação de São Paulo

Secretário: *Gabriel Benedito Issac Chalita*

Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP

Coordenadora: *Sonia Maria Silva*

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: *Adolpho José Melfi*

Pró-Reitora de Graduação

Sonia Teresinha de Sousa Penin

Pró-Reitor de Cultura e Extensão Universitária

Adilson Avansi Abreu

FUNDAÇÃO DE APOIO À FACULDADE DE EDUCAÇÃO – FAFE

Presidente do Conselho Curador: *Selma Garrido Pimenta*

Diretoria Administrativa: *Anna Maria Pessoa de Carvalho*

Diretoria Financeira: *Sílvia Luzia Frateschi Trivelato*

PROGRAMA PRÓ-UNIVERSITÁRIO

Coordenadora Geral: *Eleny Mitrulis*

Vice-coordenadora Geral: *Sonia Maria Vanzella Castellar*

Coordenadora Pedagógica: *Helena Coharik Chamlian*

Coordenadores de Área

Biologia:

Paulo Takeo Sano – Lyria Mori

Física:

Maurício Pietrocola – Nobuko Ueta

Geografia:

Sonia Maria Vanzella Castellar – Elvio Rodrigues Martins

História:

Kátia Maria Abud – Raquel Glezer

Língua Inglesa:

Anna Maria Carmagnani – Walkyria Monte Mór

Língua Portuguesa:

Maria Lúcia Victório de Oliveira Andrade – Neide Luzia de Rezende – Valdir Heitor Barzotto

Matemática:

Antônio Carlos Brolezzi – Elvia Mureb Sallum – Martha S. Monteiro

Química:

Maria Eunice Ribeiro Marcondes – Marcelo Giordan

Produção Editorial

Dreampix Comunicação

Revisão, diagramação, capa e projeto gráfico: *André Jun Nishizawa, Eduardo Higa Sokei, José Muniz Jr.*
Mariana Pimenta Coan, Mario Guimarães Mucida e *Wagner Shimabukuro*

Cartas ao
Aluno

Carta da
Pró-Reitoria de Graduação

Caro aluno,

Com muita alegria, a Universidade de São Paulo, por meio de seus estudantes e de seus professores, participa dessa parceria com a Secretaria de Estado da Educação, oferecendo a você o que temos de melhor: conhecimento.

Conhecimento é a chave para o desenvolvimento das pessoas e das nações e freqüentar o ensino superior é a maneira mais efetiva de ampliar conhecimentos de forma sistemática e de se preparar para uma profissão.

Ingressar numa universidade de reconhecida qualidade e gratuita é o desejo de tantos jovens como você. Por isso, a USP, assim como outras universidades públicas, possui um vestibular tão concorrido. Para enfrentar tal concorrência, muitos alunos do ensino médio, inclusive os que estudam em escolas particulares de reconhecida qualidade, fazem cursinhos preparatórios, em geral de alto custo e inacessíveis à maioria dos alunos da escola pública.

O presente programa oferece a você a possibilidade de se preparar para enfrentar com melhores condições um vestibular, retomando aspectos fundamentais da programação do ensino médio. Espera-se, também, que essa revisão, orientada por objetivos educacionais, o auxilie a perceber com clareza o desenvolvimento pessoal que adquiriu ao longo da educação básica. Tomar posse da própria formação certamente lhe dará a segurança necessária para enfrentar qualquer situação de vida e de trabalho.

Enfrente com garra esse programa. Os próximos meses, até os exames em novembro, exigirão de sua parte muita disciplina e estudo diário. Os monitores e os professores da USP, em parceria com os professores de sua escola, estão se dedicando muito para ajudá-lo nessa travessia.

Em nome da comunidade USP, desejo-lhe, meu caro aluno, disposição e vigor para o presente desafio.

Sonia Teresinha de Sousa Penin.

Pró-Reitora de Graduação.

Carta da Secretaria de Estado da Educação

Caro aluno,

Com a efetiva expansão e a crescente melhoria do ensino médio estadual, os desafios vivenciados por todos os jovens matriculados nas escolas da rede estadual de ensino, no momento de ingressar nas universidades públicas, vêm se inserindo, ao longo dos anos, num contexto aparentemente contraditório.

Se de um lado nota-se um gradual aumento no percentual dos jovens aprovados nos exames vestibulares da Fuvest — o que, indubitavelmente, comprova a qualidade dos estudos públicos oferecidos —, de outro mostra quão desiguais têm sido as condições apresentadas pelos alunos ao concluírem a última etapa da educação básica.

Diante dessa realidade, e com o objetivo de assegurar a esses alunos o patamar de formação básica necessário ao restabelecimento da igualdade de direitos demandados pela continuidade de estudos em nível superior, a Secretaria de Estado da Educação assumiu, em 2004, o compromisso de abrir, no programa denominado Pró-Universitário, 5.000 vagas para alunos matriculados na terceira série do curso regular do ensino médio. É uma proposta de trabalho que busca ampliar e diversificar as oportunidades de aprendizagem de novos conhecimentos e conteúdos de modo a instrumentalizar o aluno para uma efetiva inserção no mundo acadêmico. Tal proposta pedagógica buscará contemplar as diferentes disciplinas do currículo do ensino médio mediante material didático especialmente construído para esse fim.

O Programa não só quer encorajar você, aluno da escola pública, a participar do exame seletivo de ingresso no ensino público superior, como espera se constituir em um efetivo canal interativo entre a escola de ensino médio e a universidade. Num processo de contribuições mútuas, rico e diversificado em subsídios, essa parceria poderá, no caso da estadual paulista, contribuir para o aperfeiçoamento de seu currículo, organização e formação de docentes.

Prof. Sonia Maria Silva

Coordenadora da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas

Apresentação da área

[...] *a Matemática procura compreender os modelos que permeiam o mundo que nos rodeia assim como a mente dentro de nós.* […] *Assim é necessário enfatizar:*

— a procurar de soluções, e não apenas a memorização de procedimentos;

— a exploração de modelos, e não apenas a memorização de fórmulas;

— a formulação de conjecturas, e não apenas a resolução de exercícios.

[...] *com essas ênfases, os estudantes terão a oportunidade de estudar a Matemática como uma disciplina exploradora, dinâmica, que se desenvolve, em lugar de ser uma disciplina que tem um corpo rígido, absoluto, fechado, cheio de regras que precisam ser memorizadas.*

Shoenfeld (1992)[1]

Este curso de Matemática com duração de 4 meses está sendo oferecido aos alunos do último ano do ensino médio da rede pública como um incentivo para que continuem seus estudos em direção ao ensino superior. Embora não cubra todo o programa do ensino médio, pretende-se estimular o interesse dos alunos pelos diversos temas de Matemática por meio de abordagens variadas.

Serão estudados tópicos sobre Números, Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória, Geometria Plana e Espacial, Geometria Analítica, Sistemas Lineares e Funções, privilegiando o entendimento das possíveis facetas de um mesmo assunto, a análise de resultados obtidos e a interligação entre os diversos conteúdos.

Escolhas foram feitas de modo a priorizar sua formação, a discussão de idéias e a percepção de que a Matemática é uma disciplina viva, que pode ser construída, e não um amontoado de fórmulas prontas para serem decoradas e usadas. Lembrando que realmente aprendemos quando trabalhamos o conhecimento, analisando-o de várias maneiras e usando-o com critério, consideraremos, sempre que possível, aplicações em problemas reais e interdisciplinares.

Acreditando que o intercâmbio entre vocês, alunos do ensino médio, e os alunos da USP, que serão os seus professores, venha a aumentar a sua predisposição para o ensino superior, desejamos a todos **bons estudos**!

Coordenação da área de Matemática

---

[1]SCHOENFELD A. H. “Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics”. In: D. A. Grouws (ed.). *Handbook of research on mathematicas teaching and learning*. p. 334-370. Nova York: McMillan, 1992.

Apresentação do módulo

As necessidades da vida exigem que se façam contagens e medidas de vários tipos. Por exemplo, o empregado deve saber se o reajuste de seu salário foi feito corretamente; o esportista mede o tempo e a distância percorrida naquele tempo para avaliar se houve progresso em seu desempenho. O desenvolvimento dos números se deve à necessidade de usá-los em diferentes ocasiões. Quanto mais atividades sociais e comerciais entre os homens e maior a interação entre os povos, maior a necessidade de contar, registrar e representar os números.

Por que surgiram os números? Muita gente diria: para contar. Mas, se fossem apenas para contar, bastariam os números naturais. Os diversos tipos de números surgiram de necessidades da matemática e de suas aplicações. As representações destas quantidades também se modificaram ao longo da história.

Inicialmente, as quantidades eram representadas com os dedos da mão. Por isso, era comum que riscos verticais fossem usados para simbolizar quantidades (em algarismos romanos temos I, II, III). Por causa da relação com os dedos, os algarismos 1, 2, ..., 9 são chamados de *dígitos* (e, por extensão, também o 0). A representação por nós utilizada usa o sistema hindu-arábico de base 10, com seus algarismos 0, 1, 2, ..., 9 e o valor posicional dos algarismos para representar os números. Valor posicional é o que distingue, por exemplo, o quanto valem os algarismos 4 e 7 quando estão dispostos nos números 47 e 74: embora os algarismos sejam os mesmos, os números são diferentes, pois a posição dos algarismos foi mudada.

Como as transações comerciais exigiram operações com os números, o sistema hindu-arábico prevaleceu, já que sua escrita favoreceu a criação de regras operatórias relativamente simples para a operação dos números. Da necessidade de representar grandezas, tais como comprimento, área e tempo, surgiu a necessidade de subdividir a unidade em partes iguais. Os números fracionários ou racionais representam estas subdivisões. A representação decimal dos números racionais se apóia nos mesmos princípios da representação dos números naturais: a base 10 e o valor posicional. Assim, 0,1 e 1/10 são representações do mesmo número e significam a décima parte da unidade. Analogamente, 0,01 e 1/100 representam a centésima parte da unidade, e assim por diante.

Neste texto, abordaremos a Matemática tendo em vista seu desenvolvimento conceitual, para mostrar como o conhecimento surge a partir da resolução de problemas. Falaremos um pouco sobre matemática financeira e progressões. Depois, sobre números racionais e irracionais, com especial cuidado para a compreensão da representação decimal dos números e sua utilização.

Unidade 1

Um pouco de Matemática Financeira

Organizadores
Antonio Brolezzi
Élvia M. Sallum
Martha Monteiro
Elaboradores
Antonio Brolezzi
Martha Monteiro

Por causa do desenvolvimento do comércio e das relações econômicas, muita Matemática foi produzida. A Matemática Comercial ou Financeira, que envolve cálculos aritméticos de transações comerciais, ajudou a impulsionar a Matemática como ciência.

A chamada Matemática Financeira é um ramo importante de aplicação da Matemática. Esse assunto é muito mais antigo que o próprio sistema decimal. Há registros que mostram que os antigos sumérios efetuavam cálculos financeiros como juros simples e juros compostos. Acredita-se que na Mesopotâmia, entre 3000 e 2000 a.C., tenham surgido os primeiros bancos, baseados em templos que guardavam grãos e outros bens de valor. Na língua suméria, a palavra para *juro* significava *gado*. Isso se deve ao seguinte fato: se um rebanho de gado fosse emprestado a alguém por um ano, o dono do gado esperaria receber mais cabeças do que emprestou, porque o gado procria naturalmente. O excedente do gado era dividido entre as partes.

Essa idéia foi, mais tarde, transposta para outros tipos de bens, mesmo os que não crescem por si próprios. Por volta de 1800 a.C., Hamurabi, criador do império babilônico, estabeleceu taxas máximas de juros que poderiam ser cobrados sobre grãos, prata e outros bens. Quem exigisse juros além dos limites estabelecidos, teria como punição não poder mais cobrar sua dívida.

Um tablete de argila datado de 1700 a.C. traz um problema interessante da Matemática mesopotâmia: quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente? Mais adiante, você terá como resolver este problema.

A prática de considerar os juros foi utilizada durante a Antiguidade por vários povos. Posteriormente, na Idade Média, estabeleceu-se a idéia de que juros seriam ilegais, e essa prática foi proibida pela Igreja Católica. No renascimento, as grandes navegações e o restabelecimento das rotas comerciais com o Oriente fizeram com que fosse necessário trabalhar com dinheiro de modo mais rigoroso. A cobrança de juros passou a ser parte do comércio das cidades.

— Mas o que são juros?

Juro é a remuneração do capital empregado. Se aplicarmos um capital durante um determinado período de tempo, ao fim do prazo o capital irá aumentar. Esse novo valor é chamado montante e juro é a diferença entre o montante e o capital inicial. Existem duas modalidades de ganhos de juros sobre um capital. São chamados juros simples os valores obtidos na situação em que, ao longo do tempo, apenas o capital inicial rende ganho. Nos juros compostos, após cada período de tempo a que se refere a taxa contratada, os juros ganhos são somados ao capital (dizemos que são capitalizados), e no novo período os juros incidem sobre esse montante.

Exemplo 1.

O contrato de aluguel do Sr. Fulano é de 200 reais por mês. Se ele atrasar o pagamento, pagará uma multa de 2% sobre o valor total, mais juros de 0,3% por dia de atraso, aplicados de forma simples. Calcule quanto o Sr. Fulano terá de pagar se atrasar 10 dias o pagamento do seu aluguel.

Lembramos que a notação de porcentagem, como em 2%, utiliza um símbolo “%” que faz com que leiamos “dois por cento”. Isso significa 2 em 100, ou ainda 2/100. Essa fração pode ser escrita em forma decimal, como 0,02. Assim, ao fazer as contas com porcentagem, podemos utilizar tanto 2/100 como 0,02. Analogamente, 0,3% pode ser escrito como $\frac{0,3}{100}$ ou ainda 0,003.

Voltando ao exemplo 1, temos:

Cálculo da multa: R\$ 200,00 $\times$ 0,02 = R\$ 4,00

Cálculo de juros por dia: R\$ 200,00 $\times$ 0,003 = R\$ 0,60

Total de juros em 10 dias de atraso: R\$ 0,60 $\times$ 10 = R\$ 6,00

Total a pagar: R\$ 200,00 + R\$ 4,00 + R\$ 6,00 = R\$ 210,00

Exemplo 2.

Uma certa taxa por atraso foi estabelecida como 1,6% ao dia sobre o valor do capital, computado de forma simples. Vamos construir uma tabela que informe o valor do pagamento atrasado, nos primeiros 12 dias, de um capital de R\$ 100,00. A tabela abaixo foi obtida da seguinte forma:

Capital: R\$ 100,00

Pagamento com 1 dia de atraso: 100,00 + 1,60 = 101,60

Pagamento com 2 dias de atraso: 100,00 + 2 $\times$ 1,60 = 103,20

Pagamento com 3 dias de atraso: 100,00 + 3 $\times$ 1,60 = 104,80

E assim por diante. A tabela então ficaria da seguinte forma:

Dias de atraso	Valor dos juros	Valor devido
1	1,60	101,60
2	1,60	103,20
3	1,60	104,80
4	1,60	106,40
5	1,60	108,00
6	1,60	109,60
7	1,60	111,20
8	1,60	112,80
9	1,60	114,40
10	1,60	116,00
11	1,60	117,60
12	1,60	119,20

Tabela 1

Vamos explorar um pouco mais esse exemplo. Para calcular os juros por dia, fizemos a conta $100,00 \times 0,016 = 1,60$.

Observe que cada número na coluna da direita da Tabela 1 é igual ao anterior acrescido de R$ 1,60. Nesse caso, o valor dos juros é sempre o mesmo em cada período (neste caso, em cada dia).

Geralmente, em transações financeiras é acertada uma taxa de juros que se refere a um período de tempo. Indicamos pela letra i a taxa de juros por período, representada na forma decimal. No exemplo 2, $i = 0,016$ correspondente a 1,6% a.d. (lê-se "ao dia"). Ao fim de cada período, os juros simples são calculados fazendo-se a conta: $J = C \times i$, em que C indica o capital e J os juros calculados. Ao fim de n períodos, os juros serão $C \times i \times n$.

Assim, o montante após n períodos aos quais se refere a taxa será:

$M = C + Cin = C(1 + in)$

Por trás das contas envolvidas no cálculo dos juros simples há uma idéia matemática muito importante: a idéia de **progressão aritmética**.

Uma progressão aritmética – ou PA – é uma seqüência em que cada termo é obtido a partir do anterior por meio de uma simples soma de uma razão constante. Por exemplo, a seqüência de números 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... é uma progressão aritmética de razão 3. Em geral, se a PA inicia-se com um termo a_0 e tem razão r, o próximo termo, que indicaremos por a_1, será $a_1 = a_0 + r$. O termo seguinte será:

$$a_2 = a_1 + r = (a_0 + r) + r = a_0 + 2r.$$

O n-ésimo termo será dado por:

$$a_n = a_0 + nr.$$

Agora repare que a fórmula do montante em um cálculo de juros simples, como vimos acima, dado por $M = C + Cin$, pode ser vista como um exemplo de PA em que o valor inicial é C e a razão é $r = Ci$. No caso dos juros simples, a razão é o produto da taxa de juros (expressa em decimais) pelo capital inicial. No exemplo acima, $r = 1,6$, e temos, por exemplo:

$$a_{12} = 100 + 12 \times 1,6 = 119,20$$

Esse tipo de progressão, como é o caso dos juros simples, representa um fenômeno de crescimento chamado de *linear*. (Você estudará mais sobre crescimento linear no Módulo 4.) Se fizermos um gráfico colocando o período de tempo no eixo horizontal e os montantes correspondentes ao número de períodos no eixo vertical, os pontos encontrados estarão sobre uma reta. É daí que vem o nome "linear", a partir de linha (reta).

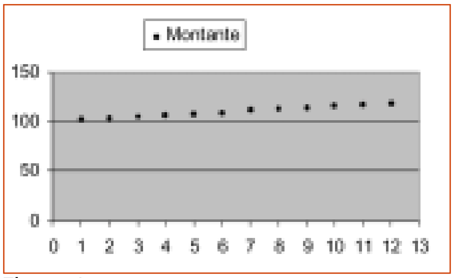


Figura 1

Podemos ilustrar esse comportamento em um gráfico no qual os pontos estão sobre a reta de equação $y = 100 + 1{,}6x$, em que x representa número de dias de atraso e y representa o montante devido.

Como mencionado anteriormente, no cálculo de juros compostos, ao final de cada período, o valor dos juros é acrescentado ao capital, aumentando a base para o cálculo dos juros nos períodos subseqüentes. É o que ocorre, por exemplo, em investimentos como a caderneta de poupança.

Exemplo 3.

Uma pessoa deixou 100 reais em uma aplicação. Supondo que ao longo de um ano os juros mensais foram sempre de 1,6% a.m. (lê-se "ao mês"), qual o montante final da aplicação?

Nesse caso, ao final de cada mês, os juros devem ser calculados e acrescentados ao capital inicial, que passa a ser o novo capital. Podemos construir a tabela abaixo, obtida da seguinte forma:

Capital: C = R\$ 100,00

Juros após o primeiro mês de aplicação: $100{,}00 \times 0{,}016$

Montante após um mês:

$$M = 100{,}00 + 100{,}00 \times 0{,}016 = 100{,}00\,(1 + 0{,}016) = 100{,}00 \times 1{,}016$$

Juros após o segundo mês de aplicação: $101{,}60 \times 0{,}016$

Montante após dois meses:

$$M = 101{,}60 + 101{,}60 \times 0{,}016 = 101{,}60 \times (1 + 0{,}016) =$$
$$= 100{,}00 \times 1{,}016 \times 1{,}016 = 100{,}00 \times (1{,}016)^2$$

Juros após o terceiro mês de aplicação: $103{,}23 \times 0{,}016$

Montante após três meses: $M = 103{,}23 + 103{,}23 \times 0{,}016 =$

$$= 100{,}00 \times (1{,}016)^3$$

E assim por diante. A tabela então ficaria da seguinte forma:

Mês	Juros (1,6% a.m.)	Montante
1	1,60	101,60
2	1,63	103,23
3	1,65	104,88
4	1,68	106,56
5	1,70	108,26
6	1,73	109,99
7	1,76	111,75
8	1,79	113,54
9	1,82	115,36
10	1,85	117,20
11	1,88	119,08
12	1,91	120,98

Tabela 2

Colocando os dados da Tabela 2 em um gráfico, à primeira vista, ele não parece ser muito diferente do gráfico da Tabela 1. Entretanto, os juros compostos geram uma expressão do montante em função do tempo n, que tem um caráter do tipo "exponencial", que você estudará mais adiante.

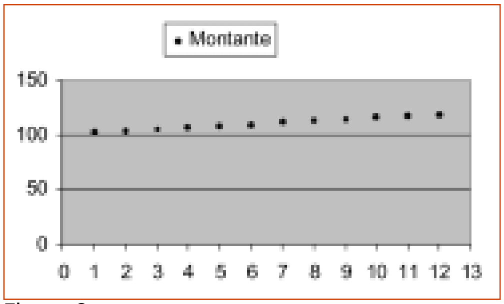


Figura 2

Como você deve ter percebido por meio do Exemplo 3, o montante obtido em uma aplicação na qual há juros compostos é $M = C(1 + i)^n$, onde C representa o capital inicial, i a taxa de juros e n, o número de períodos de rendimento. A comparação agora é com a **progressão geométrica**.

Uma progressão geométrica, denotada por PG, é uma seqüência de números em que cada termo a_n é o produto do termo anterior a_{n-1} por uma razão fixada, usualmente denotada por q:

$$a_1 = a \; ; \; a_2 = a \times q \; ;$$

$$a_3 = a_2 \times q = (a \times q) \times q = a \times q^2;$$

$$\vdots$$

$$a_n = a \times q^{n-1} \; ; \; a_{n+1} = a \times q^n$$

Voltando à expressão $M = C(1 + i)^n$, notamos que o fator que se repete, ou seja, a razão, é $q = 1 + i$.

Vamos comparar os dois casos – juros simples e compostos – utilizando um capital de R$ 100,00 aplicado por 100 meses com juros de 1,6% a.m. Vemos a diferença crescente entre os montantes obtidos, respectivamente, nos sistemas de capitalização simples e composta. Olhando os gráficos em um espaço maior de tempo, percebemos melhor a diferença que se acentua com o decorrer do tempo.

Comparando os dois gráficos, temos:

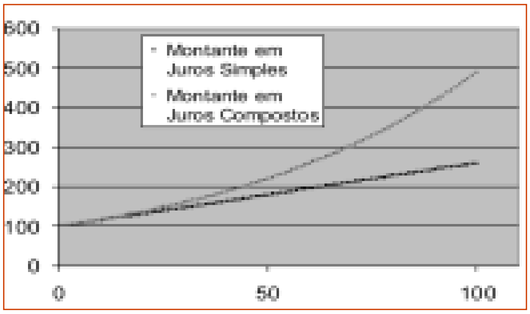


Figura 3

Pensando nesta diferença, vamos analisar agora um problema importante do consumidor brasileiro, que são as compras a prazo. Nos financiamentos – de casa própria, de automóveis, produtos eletrônicos, eletrodomésticos, móveis, compras com cartão de crédito – os juros são compostos. O montante a ser pago cresce muito rapidamente, e o consumidor pode acabar assumindo uma dívida que é muito maior do que o valor inicial da compra.

Em propagandas, o valor da prestação mensal aparece em caracteres grandes. Anunciam-se taxas de juros mensais aparentemente baixas: "Apenas 1% ao mês!" Entretanto, se prestarmos atenção às letras miúdas, vemos uma diferença importante entre o preço à vista e o preço a prazo. Outra questão intrigante é que o juro é mensal, mas no entanto a prestação por mês é fixa. Como calcular essa prestação fixa?

Para entender o processo, temos que aprender como fazer a **soma de uma PG**.

Em geral, se uma PG tem como primeiro termo *a* e razão *q*, temos que o *n*-ésimo termo é dado por $a_n = aq^{n-1}$.

— Como obter a soma S_n dos *n* primeiros termos de uma PG?

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} \ (1)$$

Para obter uma expressão sintética para S_n, multiplicamos ambos os lados da igualdade por *q*, e teremos:

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} + aq^n \ (2)$$

Subtraindo (2) de (1), teremos:

$$S_n - qS_n = a - aq^n \text{ , então: } S_n (1 - q) = a (1 - q^n)$$

Ou ainda, para $q \neq 1$,

$$S_n = a\,\frac{(1-q^n)}{(1-q)} \quad \text{ou} \quad S_n = a\,\frac{(q^n-1)}{(q-1)}$$

(O que aconteceria se $q = 1$?)

Exemplo 4.

Um *discman* é vendido por R$ 159,00 à vista. O produto pode ser parcelado com juros de 1,35% a.m. Qual o valor das parcelas se o pagamento for parceldo em 3 vezes?

A prática do comércio é fazer parcelas fixas, embutindo nelas os juros. Supondo que o parcelamento seja sem entrada, veremos que obtemos uma PG de razão 1,0135. Devemos decompor o preço à vista em 3 partes ($159 = P_1 + P_2 + P_3$) de forma que, aplicando a taxa de juro combinada ($i = 0{,}0135$) no momento do pagamento, cada uma delas tenha o mesmo valor *P* da parcela fixa. Assim teremos $P = P_1 \times 0{,}0135$, $P = P_2 \times (0{,}0135)^2$ e $P = P_3 \times (0{,}0135)^3$ (Você saberia dizer por quê?). O problema que se apresenta é resolver a equação apresentada abaixo, na qual a incógnita é a parcela fixa *P*:

$$159{,}00 = \frac{P}{(1{,}0135)^3} + \frac{P}{(1{,}0135)^2} + \frac{P}{1{,}0135}$$

Utilizando o resultado da soma da PG visto acima, temos:

$$159{,}00 = \frac{P}{(1{,}0135)^3}\left(\frac{(1{,}0135^3-1)}{(1{,}0135-1)}\right) \cong P \times 2{,}92 \quad \Rightarrow P = \frac{159{,}00}{2{,}92} = 54{,}45$$

Resposta: A parcela fixa será de R$ 54,45.

Generalizando esse processo, podemos obter um procedimento que permite calcular o valor das parcelas.

Consideremos a seguinte expressão, em que V é o valor do bem à vista; P é o valor da parcela fixa; i é a taxa de juro expressa em decimais e n é o número de prestações:

$$V = P\left(\frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{1+i}\right)$$

Note que a expressão entre parênteses é uma PG em que o primeiro termo é $a = \frac{1}{(1+i)^n}$; o número de termos é n e a razão é $q = 1 + i$. Obtemos:

$$V = P \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \qquad \text{ou} \qquad V = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Freqüentemente as lojas têm os valores mais comuns para o fator acima descrito em uma tabela, a qual pode ser consultada pelos vendedores na hora. Ou então pode-se fazer o cálculo utilizando uma calculadora que tenha pelo menos uma tecla x^y.

Exemplo 5.

Qual o valor da parcela fixa se o *discman* do Exemplo 4 fosse adquirido em 12 vezes?

Utilizando a fórmula:

$$V = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

temos:

$$159{,}00 = P \times \frac{1-(1+0{,}0135)^{-12}}{0{,}0135}$$

$$159{,}00 \cong P \times 11{,}01 \Rightarrow P \cong \frac{159{,}00}{11{,}01} \cong 14{,}44$$

O valor de cada parcela será de R$ 14,44.

Note que o comprador pagará 12 prestações de R$ 14,44, ou seja, R$ 173,28, que é quase 9% maior que o preço à vista. **Será que compensa?**

Exemplo 6.

Vamos calcular o valor da prestação de uma filmadora digital que custa, à vista, R$ 1.899,90, cujo anúncio oferece um parcelamento em 12 vezes com juros de 2,99% a.m.:

Utilizando a fórmula:

$$V = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

temos:

$$1899{,}90 = P \times \frac{1-(1+0{,}0299)^{-12}}{0{,}0299}$$

O valor de cada parcela será de R$ 190,95.

Nesse caso, o valor a prazo é de R$ 2.291,40, ou seja, é cerca de 20% maior que o valor à vista.

Outra consideração interessante é a seguinte: se, ao invés de pagar prestações todo mês colocássemos a mesma quantia em uma aplicação, quanto poderíamos obter ao término do período correspondente à compra a prazo? Isto é, qual seria o montante gerado M se o valor correspondente a cada parcela P fosse depositado, por exemplo, numa caderneta de poupança que rendesse um juro i por n meses? Nesse caso, a PG gerada teria a seguinte forma:

$$M = P(1+i)^n + P(1+i)^{n-1} + \ldots + P(1+i)^3 + P(1+i)^2 + P(1+i)$$

Ou ainda, colocando P em evidência e ordenando os termos de forma crescente:

$$M = P[(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$$

O primeiro termo é $(1 + i)$ e a razão da PG é $1 + i$. Teríamos então:

$$M = P\frac{(1+i)((1+i)^n - 1)}{i}$$

Vamos comparar este resultado pensando no Exemplo 6, em que teríamos de pagar R$ 190,95 durante 12 meses. Se investíssemos R$ 190,95 em uma aplicação que pagasse os mesmos 2,99% a.m. de juros que a loja cobrava no Exemplo 6, teríamos então um valor bem maior, de R$ 2.789,41. Com essa quantia, poderíamos comprar a filmadora de R$ 1.899,90 à vista e ainda sobrariam R$ 889,51. Outra consideração é que a loja poderia aplicar cada uma das prestações, obtendo assim bem mais que o preço pago pelo cliente.

A Matemática tem ajudado a tomar decisões importantes na vida prática e tem se desenvolvido impulsionada principalmente pelas necessidades práticas (motivação externa), mas também pela necessidade de resolver problemas gerados pela própria construção da Matemática (motivação interna).

Foi pensando em problemas originados pela economia que resultados importantes da Matemática foram desenvolvidos. O número e, mais freqüentemente associado aos logaritmos, foi descoberto em um estudo de juros compostos.

A idéia é a seguinte: se um capital fosse aplicado durante um certo período, com taxa de juros de 100% ao período, o montante após aquele período seria:

$$M = C(1+i)^n \Rightarrow M = C(1+1)^1 \Rightarrow M = 2C$$

— Qual seria o montante se os juros fossem capitalizados duas vezes no mesmo período e a taxa fosse dividida pela metade?

Teríamos:

$$M = C\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}C$$

Se os juros fossem capitalizados 3 vezes no período, e a taxa dividida por 3, teríamos:

$$M = C\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{16}{9}C$$

Seguindo o mesmo raciocínio, se a taxa fosse capitalizada *n* vezes no período, e a taxa dividida em *n* partes, teríamos:

$$M = C\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Complete a tabela abaixo com alguns resultados para a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2,00000
2	2,25000
4	
10	
1.000	
1.000.000	

Tabela 3

À medida que *n* cresce, o montante também cresce. Em 1683, Jacob Bernoulli trabalhava com este problema e ficou curioso para saber se esse crescimento seria ilimitado. A questão colocada foi: o que ocorre com a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando *n* é muito grande?

Deixando o valor de *C* de lado, Bernoulli estudou o valor da expressão $(1 + {}^{1}/_{n})^n$ quando *n* cresce indefinidamente, e provou, usando a expansão do binômio de Newton (que será vista no Módulo 2), que o resultado está entre 2 e 3.

Jacob (Jacques) Bernoulli (1654-1705). Em: *MacTutor <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/PictDisplay/Bernoulli_Jacob.html>.*

Leonhard Euler (1707-1783).
Em: *MacTutor <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/PictDisplay/Euler.html>.*

Dois séculos mais tarde, o matemático Leonhard Euler (1707-1783) provou que a expressão $(1 + 1/n)^n$ se aproxima, quando n cresce indefinidamente, de um número irracional que vale aproximadamente 2,718281828. Esse número é representado pela letra e.

Unidade 2

Representações Decimais

Organizadores
Antonio Brolezzi
Élvia M. Sallum
Martha Monteiro
Elaboradores
Antonio Brolezzi
Martha Monteiro

Utilizamos representações decimais em muitos dos cálculos que foram feitos na unidade anterior. Vamos agora analisar com mais cuidado essas representações dos números.

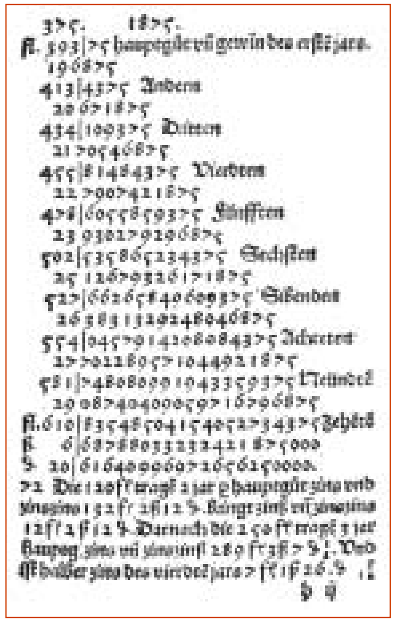
Observe que na Tabela 2, vista na Unidade anterior, os valores são expressos apenas com duas casas decimais. Fazendo as contas, notamos que há muitas casas decimais sendo desprezadas. O juro ganho apenas no último mês de aplicação é de R$ 1,91. Poderíamos usar um valor mais preciso – por exemplo 1,905245 – que arredondamos para R$ 1,91. Supondo que o problema fosse investir não 100 reais, mas um milhão de reais, teríamos um maior significado para aquelas casas decimais, como vemos na Tabela 4 abaixo:

Mês	Juros (1,6% a.m.)	Montante
1	16.000,00	1.016.000,00
2	16.256,00	1.032.256,00
3	16.516,10	1.048.772,10
4	16.780,35	1.065.552,45
5	17.048,84	1.082.601,29
6	17.321,62	1.099.922,91
7	17.598,77	1.117.521,68
8	17.880,35	1.135.402,02
9	18.166,43	1.153.568,46
10	18.457,10	1.172.025,55
11	18.752,41	1.190.777,96
12	19.052,45	1.209.830,41

Tabela 4

Neste caso, uma maior precisão implica em mudanças significativas nos resultados. Note que no último mês o juro foi de R$ 19.052,45. As casas decimais agora fazem muita diferença. A limitação da representação dos valores monetários a duas casas decimais, os centavos de real, não é praticada em alguns casos, como, por exemplo, em postos de gasolina que anunciam o preço por litro, na forma R$ 2,199. Em outros contextos, como os índices de cotação de dólares na bolsa de valores ou em outros investimentos, aparecem também casas decimais além dos centavos. Por que se faz isso?

O desenvolvimento do comércio gerou novas necessidades para a Matemática. Por exemplo, Christoff Rudolff (1499-1545), um polonês que estudou e trabalhou em Viena, na Áustria, é considerado o primeiro a propor o uso sistemático de representações decimais na Europa, e o fez pelas necessidades de representação de juros compostos. Também é atribuída a ele a criação do símbolo da raiz quadrada utilizado atualmente.



Página da obra de Rudolff de 1530 mostrando o uso de frações decimais em juros compostos (Smith, 1925).

O belga Simon Stevin (1548-1620) foi o responsável pelo tratamento dado atualmente às frações decimais.

Simon Stevin (1548-1620)
Em: *MacTutor <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/PictDisplay/Stevin.html>*.

Em 1585, publicou *La theinde* [*A dízima*], uma obra dedicada a diversos profissionais do comércio. Foi ele que chegou a sugerir que o sistema decimal fosse adotado pelo governo para pesos, medidas e dinheiro em sua obra traduzida para o inglês por Robert Norton em 1608, intitulada *Disme*: *the arts of tenths or decimal arithmetike*, que também foi a inspiração para Thomas Jefferson propor a divisão decimal da moeda americana (hoje em dia, um décimo de dólar ainda é chamado de *dime*).

É interessante observar essas opções que os povos fizeram de notações e representações numéricas e de medidas. Por exemplo, até hoje são utilizados dois sinais para separar as casas inteiras e decimais nas representações decimais. Alguns países, como o Brasil, utilizam vírgula, enquanto outros, como os Estados Unidos, utilizam ponto. Igualmente, alguns países seguiram a unificação dos sistemas de medidas baseados na fração decimal, como o metro e o centímetro, enquanto outros permaneceram utilizando pés e polegadas.

Lembramos que, na representação decimal, cada **número inteiro positivo** é escrito como uma sucessão de algarismos pertencentes ao conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e a posição que cada algarismo ocupa determina qual potência de 10 é fator daquele algarismo. Por exemplo:

$$1375 = 1000 + 300 + 70 + 5 =$$
$$= 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Um número é um **número racional** se puder ser escrito na forma *p/q*, onde *p* e *q* são inteiros e *q* é diferente de zero. Por exemplo, os números 5 = $\frac{5}{1}$; $\frac{28}{3}$ e $\frac{7}{15}$ são números racionais (positivos).

Chamamos de *fração decimal* a fração cujo denominador é uma potência de 10. Por exemplo, $\frac{2}{10}$; $\frac{13}{100}$; $\frac{85}{10.000}$

são frações decimais que correspondem, respectivamente, aos números 0,2; 0,13 e 0,0085.

Denotando 0,1 por $\frac{1}{10}$ (que também pode ser escrito como 10^{-1}), 0,01 por $\frac{1}{100}$ (que é igual a 10^{-2}) e assim por diante, podemos escrever as frações decimais como somas especiais, como a do exemplo a seguir.

Exemplo 7.

A representação decimal de $\frac{123}{1000}$ é:

$$0{,}123 = 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}03 = 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3}$$

— O que significa essa representação?

Como a base 10 foi adotada para a representação dos números inteiros, nada melhor do que subdividir a unidade em 10 partes iguais, cada uma de tamanho 1/10. Subdivide-se cada décima parte em 10 partes iguais, de tamanho 1/100, e assim sucessivamente. No exemplo acima, o número 0,123 representa uma quantidade que é a décima parte somada a 2 centésimas partes e somada ainda a 3 milésimas partes de um inteiro.

Vejamos num exemplo o significado dessa representação.

Exemplo 8.

É preciso distribuir R$ 9,00 em partes iguais para 4 pessoas. Qual o valor que cada pessoa receberá?

É muito fácil: basta dividir 9 por 4. Mas como isso é feito na prática? Primeiro reparamos que cada pessoa deverá receber mais do que 2 reais, mas menos do que 3 (por quê?). Supondo que temos 9 notas de 1 real, repartindo 2 reais para cada pessoa, um total de 8 reais já está dividido, restando dividir entre elas o que sobrou, que é 1 real. Sabemos que cada moeda de 10 centavos de real corresponde a 1/10 de real. Trocando a nota de 1 real por 10 moedas de 10 centavos, e repartindo entre as 4 pessoas, vemos que cada pessoa receberá 2 moedas de 10 centavos, mas sobrarão 2 moedas. Novamente, cada moeda de 10 centavos pode ser trocada por 10 moedas de 1 centavo, que representa 1/100 de real. Serão 20 moedas de 1 centavo que devem ser divididas entre 4 pessoas. Cada pessoa ficará com 5 moedas de 1 centavo. Portanto cada pessoa receberá

$2 + 2 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100}$ reais.

Esse valor é representado por R$ 2,25. Podemos escrever: $2{,}25 = 2 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$

Observe outros exemplos:

$$\frac{405}{1000} = 0{,}405 = 4 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3};$$

$$\frac{6439}{100} = 64{,}39 = 6 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2}$$

Podemos generalizar afirmando que se $b_0, b_1, \ldots, b_k, a_1, a_2, \ldots$, e a_n representam algarismos, então o número $b_k \ldots b_1\, b_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ é igual a:

$$b_k \times 10^k + \ldots + b_1 \times 10^1 + b_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^{-1} + a_2 \times 10^{-2} + \ldots + a_n \times 10^{-n}$$

— Como encontrar representações decimais de números racionais quaisquer?

Para representar um número racional p/q ($q \neq 0$) na forma decimal vamos dividir o numerador p pelo denominador q. Ao fazermos isso, podemos encontrar duas situações:

1. Em algum ponto da divisão se chega ao resto zero. Neste caso o quociente é um número formado por uma parte inteira (eventualmente nula) seguida de uma vírgula e de uma quantidade *finita* de casas decimais. Nesse caso, dizemos que se trata de uma **representação decimal finita**.

2. Nunca se chega ao resto zero. Neste caso, a divisão prossegue indefinidamente e o quociente é formado por uma parte inteira (que pode ser zero), seguida de uma vírgula e de uma sucessão de casas decimais que pode ser prolongada o quanto se queira. Nesse caso, diremos que se trata de uma representação decimal infinita.

Vejamos os seguintes exemplos:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

$$\frac{35}{4} = \frac{35 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{27}{5} = 8{,}75$$

$$\frac{27}{5} = \frac{27 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{54}{10} = 5{,}4$$

Note que no caso de cada fração multiplicamos o numerador e o denominador por alguma potência de 5 ou de 2, de modo a conseguir que o denominador se transforme em uma potência de 10.

Tome uma fração p/q, em sua forma irredutível, isto é, uma fração em que o numerador p e o denominador q são números naturais primos entre si ($q \neq 0$). Sempre que a decomposição do denominador q em fatores primos só tiver potências de 2 ou de 5, é possível usar o processo descrito acima para transformar a fração em outra equivalente, que seja da forma $a/10^n$, para algum número natural a. Vejamos mais um exemplo: o número $\frac{9}{60}$ não está na forma irredutível, mas a fração $\frac{3}{20}$ é equivalente a $\frac{9}{60}$ e é irredutível.

Como o denominador 20 é um divisor de 100 e $100 = 20 \times 5$, multiplicamos numerador e denominador por 5, obtendo:

$$\frac{9}{60} = \frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

Agora faça você

Usando o processo acima (sem usar a calculadora), encontre a representação decimal dos seguintes números:

$$\frac{63}{40}, \frac{41}{20}, \frac{35}{14}, \frac{315}{252}, \frac{9741}{3200}$$

— Se a decomposição do denominador q tiver potências de outros primos além de 2 e de 5, o que acontece?

Para responder a essa pergunta precisamos entender um pouco melhor o algoritmo da divisão (o processo utilizado para fazer a conta de dividir).

Na divisão de 9 por 4 fazemos automaticamente o seguinte procedimento:

$$\begin{array}{r|l}
9 & 4 \\ \cline{2-2}
-8 & 2{,}25 \\ \cline{1-1}
10 & \\
-8 & \\ \cline{1-1}
20 & \\
-20 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

— O que significa o zero colocado à direita do número 1, que era o resto da divisão de 9 por 4?

Significa que estamos trocando 1 inteiro (que não dá para dividir por 4) por 10 décimos. (Trata-se de representar o mesmo número de modo diferente, neste caso mais conveniente para nosso objetivo, que é dividir 1 por 4.) Como no caso do Exemplo 8, em que trocamos 1 real por 10 moedas de 10 centavos, estamos trocando a maneira de representar o número 1.

Em seguida, é efetuada a divisão de 10 décimos por 4, de onde se obtém 2 décimos. Por isso, a resposta será escrita com o algarismo 2 na primeira casa após a vírgula que é, por convenção, a posição dos décimos. Analogamente, o zero colocado à direita do resto 2 significa que para dividir 2 décimos por 4, deve-se trocar 2 décimos por 20 centésimos e efetuar a divisão por 4. O resultado, 5 centésimos, é escrito colocando-se o algarismo 5 na segunda casa decimal.

Portanto:

$$\frac{9}{4} = 2{,}25 = 2 + 2 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100} = 2 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

(Na linha acima, escrevemos o mesmo número de várias maneiras. Cada uma dessas maneiras tem sua utilidade. Por enquanto, vamos apenas conhecê-las.)

Vamos usar esse mesmo processo para tentar obter a representação decimal de 10/3.

```
10      |_3____
- 9       3,33
 10
 - 9
   10
   -9
    1
```

Note que este processo não tem como terminar. Ou seja, nunca teremos resto igual a zero. Este é um exemplo de um número cuja representação decimal não é finita. É comum escrevermos esta representação na forma 3,333... As reticências indicam que a representação é infinita. Mas note que é uma notação imprecisa, pois só com as reticências não é possível saber como são as demais casas decimais que não estão escritas. Na representação decimal de 10/3 notamos que o algarismo 3 se repetirá em todas as casas decimais. Para indicar isso, a convenção é escrevemos $10/3 = 3{,}\overline{3}$.

Vejamos outro exemplo: a representação decimal de $\frac{53}{55}$.

Usando o algoritmo da divisão, encontraremos 0,963636363... – a conta de dividir não acaba e os algarismos 6 e 3 irão se repetir nessa ordem sem parar (confira, fazendo a conta!). A maneira precisa de se informar todo o comentário que está entre os hífens é escrever:

$53/55 = 0{,}9\overline{63}$

A barra sobre o par de algarismos 63 indica que esse par se repete indefinidamente.

Vamos aproveitar para fazer algumas considerações importantes: no caso acima, o número 0,9 é **uma aproximação** de 53/55.

Como $53/55 - 0{,}9 = 0{,}0\overline{63}$, o erro que se comete ao usar 0,9 em vez de 53/55 é menor do que 0,1 ($=10^{-1}$).

O número 0,96 também é uma aproximação de 53/55, melhor do que a anterior, pois o erro cometido ao se escrever 0,96 em vez de 53/55 é menor do que 10^{-2}.

Quanto mais casas decimais escrevermos, maior será a precisão da aproximação. Mas note que é errado escrever 53/55 = 0,96363, pois 0,96363 não é igual, mas apenas uma aproximação de 53/55 (às vezes escrevemos 53/55 ≈ 0,96363). Se essa aproximação é boa ou não vai depender do problema que se quer resolver com esse número, como já foi visto anteriormente em problemas de Matemática Financeira.

Agora faça você

(a) Ache a forma decimal de 16/90.

(b) Dê uma aproximação para 16/90, com erro menor do que 10^{-3}.

Se a representação decimal de um número apresentar um grupo de algarismos que se repete na mesma ordem, como vimos nos exemplos anteriores, dizemos que essa representação é uma **dízima periódica**. O grupo de algarismos que se repete no quociente é chamado **período**. Assim, na fração 10/3, o período é 3; na fração 53/55, o período é 63.

Agora faça você

Verifique que a representação decimal de cada número racional abaixo é uma dízima periódica: $\frac{6}{11}, \frac{3184}{9900}, \frac{100}{6}$.

Como vimos acima, sempre que x for um número racional que, ao ser escrito na forma irredutível apresenta um denominador q que é um número inteiro cuja decomposição em fatores primos só contém potências de 2 ou de 5, então a representação decimal de x será finita.

Vamos agora olhar o que acontece quando o denominador contém outros fatores primos, começando por compreender o que acontece no exemplo $x = \frac{4}{7}$. Efetuando a divisão, temos:

```
 40          | 7
-35           0,571428...
  50
 -49
   10
   -7
    30
   -28
     20
    -14
      60
     -56
        4
```

Observe que, nesse caso, os restos da divisão são 5, 1, 3, 2, 6 e 4, nesta ordem. Quando chegamos ao resto 4 o processo começará a repetir. Como em qualquer divisão, o resto deve ser sempre menor do que o divisor. Assim na divisão acima, só os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 podem ser resto dessa divisão. Como 0 não aparece e só há 6 restos possíveis, eles têm que repetir, formando a dízima. Logo, $4/7 = 0,\overline{571428}$.

Em geral, se $x = p/q$ for um número racional escrito em sua forma irredutível, e se o denominador q tiver outros fatores primos além de 2 e 5, sua representação decimal será uma dízima, pois na divisão de p por q, os únicos restos possíveis serão 1, 2, ... , $(q – 1)$ — uma quantidade finita de possibilidades. Com isso, teremos certeza de que, em algum momento, um determinado resto irá se repetir e, a partir daí, todo o algoritmo irá se repetir, resultando assim uma dízima periódica.

Com isso, concluímos que **a representação decimal de qualquer número racional ou é finita, ou é uma dízima periódica**.

Sabemos transformar um número escrito na forma decimal finita em fração, como no exemplo: $0{,}14 = \frac{0{,}14.100}{100} = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$

Mas como podemos achar a fração correspondente a uma dízima?

Vejamos um exemplo. Considere o número

$$x = 1{,}2\overline{45} = 1{,}2454545...$$

Note que os algarismos começam a se repetir a partir da segunda casa decimal, com o algarismo 4. Vamos multiplicar o número por 10:

$$10\,x = 12{,}\overline{45} = 12{,}454545...$$

Agora, vamos multiplicar o mesmo x por 10^3:

$$10^3\,x = 1245{,}454545...$$

Você reparou que a parte não inteira de cada um desses dois novos números é igual? Se subtrairmos o maior do menor, ela irá cancelar:

$$10^3\,x – 10\,x = 1245{,}\overline{45} - 12{,}\overline{45} = 1233$$

Logo, $10x\,(100 – 1) = 1233$ e, portanto, $x\,990 = 1233$. Logo, $x = \frac{1233}{990}$.

O que você achou? Você pode estar pensando que eu adivinhei magicamente que as potências 10 e 10^3 ajudariam a resolver meu problema. Na verdade, essas potências foram criteriosamente escolhidas... Tente descobrir qual o segredo!

Agora faça você

Escreva os números seguintes na forma de fração: $3{,}\overline{7}$; $0{,}54\overline{83}$; $0{,}0\overline{01}$; 0,999...

No último item do exercício acima, você deve ter concluído que 0,999 = 1. Esse sinal de igual é igual mesmo! Não se trata de aproximação: 0,9 e 1 são duas formas diferentes de representar o mesmo número.

Note também que, dividindo-se por 10 os dois lados da igualdade 0,999... = 1 obtemos 0,0999... = 0,1. Dividindo novamente, obtemos 0,00999... = 0,01, e assim por diante. Com isso, conseguimos escrever qualquer representação decimal finita na forma de dízima com infinitos noves. Veja:

2,5 = 2,4 + 0,1 = 2,4 + 0,0999... = 2,4999...

1,48 = 1,47 + 0,01 = 1,47 + 0,00999...

Reciprocamente, toda dízima que tem uma infinita sucessão de noves pode ser escrita como uma fração decimal finita.

Dízimas e Progressões Geométricas

Vamos voltar a reparar com cuidado no número 3,333...; podemos também escrevê-lo da seguinte forma:

$$3{,}333... = 3+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+... = 3+3\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{10^2}+3\cdot\frac{1}{10^3}+...$$

$$= 3\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...\right)$$

Repare que dentro dos parêntesis há uma soma cujas parcelas formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{10}$ e termo inicial 1. Como a razão é menor do que 1, é possível calcular a soma de infinitos termos:

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{10}{9}$$

Portanto, 3,333... $=3\cdot\left(\frac{10}{9}\right)=\frac{10}{3}$

Vejamos mais um exemplo:

$$10{,}41\overline{285}=10{,}41+0{,}00\overline{285}=\frac{1041}{100}+\frac{285}{10^5}+\frac{285}{10^8}+\frac{285}{10^{11}}+...=$$

$$=\frac{1041}{100}+\frac{285}{10^5}\cdot\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+...\right)$$

Novamente, notamos que a expressão dentro dos parêntesis é uma soma de termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão 10^{-3} e termo inicial igual a 1.

A soma dessa PG é $S=\frac{1}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{1}{\frac{999}{10^3}}=\frac{1000}{999}$

Assim, $10{,}41\overline{285}=\frac{1041}{100}+\frac{285}{10^5}\cdot\left(\frac{1000}{999}\right)=\frac{1041}{100}+\frac{285}{99900}=\frac{1040244}{99900}$

(Use uma calculadora para efetuar 1040244 ÷ 99900 e confira o resultado.)

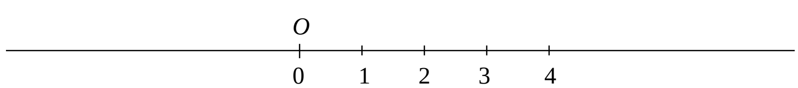
Nos dois exemplos acima encontramos uma soma de uma progressão geométrica com infinitos termos como fator da fração que representa o primeiro período da dízima. Esse fato não é uma coincidência. Toda dízima traz embutida uma soma de PG.

Números Reais

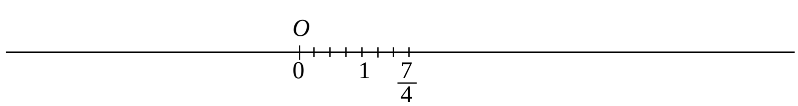
Lembremos que os números surgiram da necessidade de contar e de medir. Os gregos, no século V a.C., perceberam que os números racionais não eram suficientes para representar todo tipo de comprimento. Por isso, foi necessário ampliar o conjunto dos números racionais. O conjunto de números que contém todos os números que representam os possíveis comprimentos de segmentos, é chamado de conjunto dos **números reais**.

Primeiramente, vamos associar números racionais positivos a pontos de uma reta. Considere uma reta qualquer e fixe um ponto. A esse ponto damos o nome de origem (O) e associamos o número 0. Escolhemos também um segmento e convencionamos que seu comprimento será a unidade de medida (u):

Em seguida, colocamos o segmento unitário u sobre a reta, de modo que sua extremidade à esquerda coincida com a origem. À outra extremidade associamos o número 1. Fazemos o mesmo com todos os outros números naturais, obtendo a associação mostrada na figura abaixo:



Para representarmos um número racional positivo $r = p/q$, dividimos o segmento unitário em q partes iguais. Cada parte tem comprimento $1/q$ unidades. Tomando-se p desses segmentos justapostos a partir da origem, encontraremos o ponto correspondente ao número r. Na figura abaixo, representamos a fração 7/4:



Desta forma, conseguimos representar os números positivos em **ordem crescente** ao longo da reta. Por isso, coloca-se uma seta indicando o sentido de crescimento.

Os pontos à esquerda da origem são associados aos números negativos da seguinte maneira: Se P for um ponto da reta à direita da origem, associado ao número positivo x, consideramos o ponto Q na mesma reta, simétrico a P em relação à origem, isto é, Q está à esquerda de O de modo que a distância de Q a O seja igual à distância de O a P. O ponto Q assim determinado representa o número negativo $-x$.

O número $-x$ é chamado *oposto* de x. (Observe que se a for um número negativo, seu oposto $-a$ será positivo.) Usamos o símbolo $x > 0$ para indicar que x é um número positivo e $a < 0$ para indicar que a é um número negativo. Os números positivos estão representados à direita da origem e os negativos, à esquerda. Mas temos um problema: **os pontos da reta que representam os números racionais não preenchem a reta toda!**

De fato, no século V a. C. os gregos descobriram que existem medidas de comprimento que não são números racionais, isto é, não podem ser colocados na forma p/q com p e q inteiros e $q \neq 0$.

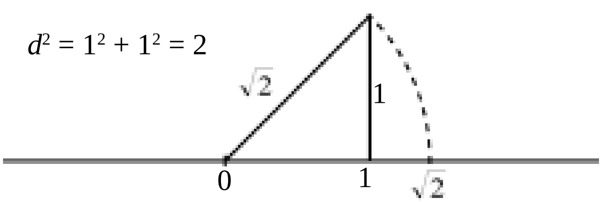
Considere o quadrado cujos lados medem 1 unidade de comprimento. A diagonal desse quadrado é um segmento de reta de comprimento d. O **Teorema de Pitágoras**, que veremos no fascículo 3, nos dá a dica de como calcular o valor de d: a diagonal do quadrado é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1. Assim,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

Logo, $d = \sqrt{2}$.

Com isso, vemos que o número $\sqrt{2}$ é um número que pode ser associado à reta, já que ele representa o comprimento de um segmento.

$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$



Mas esse número não é um número racional! Como sei disso? Não serve dizer que sei porque alguém me contou, pois isso não é **saber**. Saber é **saber por quê**. Vamos lá:

Se fosse um número racional, então ele poderia ser escrito na forma de fração irredutível p/q, com p e q números inteiros e $q \neq 0$. Logo, elevando ao quadrado, teríamos $2 = \frac{p^2}{q^2}$, que é equivalente a $p^2 = 2q^2$.

Façamos uma pequena pausa para uma observação importante

Imagine um número inteiro positivo qualquer. Ele pode ser escrito como produto de fatores primos. Quando elevamos esse número ao quadrado, os fatores aparecem em dobro. Por exemplo, na fatoração do número 12 temos

$$12 = \underbrace{2 \times 2}_{2} \times \underbrace{3}_{1}$$

Logo, na fatoração de 12^2 temos

$$12^2 = (2 \times 2 \times 3)^2 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4} \times \underbrace{3 \times 3}_{2}$$

Vejamos outro exemplo:

$$75 = 3 \times 5 \times 5 \text{ e } 75^2 = (3 \times 5 \times 5)^2 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5.$$

Voltemos ao nosso problema: estávamos procurando números inteiros p e q que satisfaziam $p^2 = 2q^2$. Mas vejam só: na decomposição de p^2 deve haver uma quantidade par de fatores iguais a 2, bem como na fatoração de q^2. Mas então, $2q^2$ terá uma quantidade ímpar de fatores iguais a 2. Então não pode ser igual a p^2!

Provamos, usando uma demonstração por absurdo, que não existem números inteiros p e q tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Logo, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

— Como poderíamos achar uma representação decimal para tal número? De que forma ela deve ser?

Como $\sqrt{2}$ não é racional, sabemos que sua representação decimal não pode ser finita, nem pode ser uma dízima periódica. Logo, só pode ser um número com infinitas casas decimais, mas que não forma dízima. Vamos agora achar aproximações para o número $\sqrt{2}$.

Sabemos que o número 2 está entre os quadrados perfeitos 1 e 4. (Escrevemos $1<2<4$.) Logo, sua raiz quadrada deve satisfazer a desigualdade $1< \sqrt{2} < 2$. (Dizemos que $\sqrt{2}$ é maior do que 1, mas ao mesmo tempo, menor do que 2.)

Podemos agora, por tentativa, procurar uma aproximação com uma casa decimal. Acompanhe minhas contas:

$1^2 = 1$; $(1{,}1)^2 = 1{,}21$; $(1{,}2)^2 = 1{,}44$; $(1{,}3)^2 = 1{,}69$; $(1{,}4)^2 = 1{,}96$; $(1{,}5)^2 = 2{,}25$.

Opa! Passou de 2! Posso então concluir que, como $1{,}96 < 2 < 2{,}25$, então

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

Dizemos que 1,4 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ por falta e que 1,5 é uma aproximação por excesso. Note que com isso, sabemos que o erro cometido ao usarmos 1,4 ou 1,5 como uma aproximação para o número $\sqrt{2}$ é menor do que 0,1.

Vamos achar uma aproximação com duas casas decimais? Isso requer mais contas:

$(1{,}41)^2 = 1{,}9881$; $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$. Como passou de 2, podemos parar e concluir que, como $(1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2$ então

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

O erro cometido ao aproximarmos $\sqrt{2}$ por 1,41 (por falta) ou por 1,42 (por excesso) é menor do que 0,01.

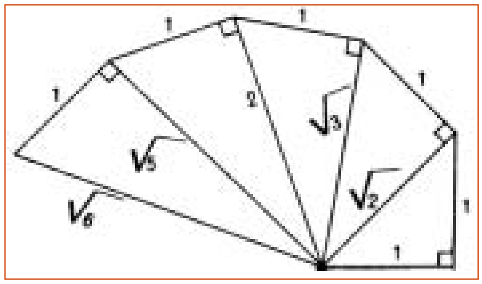
Agora faça você

Usando uma calculadora para fazer as potências necessárias, ache as próximas três casas decimais de $\sqrt{2}$.

Note que, como sabemos que esse número é irracional, o processo não acabará nunca! Uma aproximação com erro menor do que 10^{-28} é

1,4142135623730950488016887242

Para cada número natural n, sua raiz quadrada $\sqrt{n}$ é um número real, pois representa a medida de algum segmento de reta (veja a figura).



Se n não for um quadrado perfeito então $\sqrt{n}$ é um número irracional. (O porquê desta última afirmação é assunto para um curso superior, mas você pode tentar generalizar o procedimento usado para provar que $\sqrt{2}$ é irracional para provar mais alguns exemplos.) Assim os números $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{1000}$ etc. são irracionais.

Outro número irracional famoso e importante em Matemática, principalmente em geometria e em trigonometria (que você estudará neste curso, em breve) é o número π. Uma aproximação para com erro menor do que 10^{-8} é 3,14159265. A aproximação $\pi \approx 3{,}14$ é a mais usada em escolas, pois leva a contas razoavelmente curtas. Só tome cuidado para não escrever $\pi = 3{,}14$, pois isso é falso.

É importante notar como sabemos qual a **ordem** entre dois números escritos em sua representação decimal: Começamos por comparar a parte inteira. Se forem iguais, comparamos cada casa decimal dos números até encontrarmos uma casa decimal em que os algarismos sejam distintos: o maior número é aquele que tem o maior algarismo nessa casa. Por exemplo, se $x = 2{,}67424$ e $y = 2{,}67426$, então $x<y$, já que as partes inteiras de x e de y são iguais, bem como as quatro primeiras casas decimais. A quinta casa decimal é 4 no número x e é 6 em y.

Agora faça você

1 – Encontre um número entre x e y dados acima. É possível encontrar mais um? E mais 5 números entre x e y?

2 – Sabendo que a é um número entre 0,385 e 0,394, você pode dizer qual é a parte inteira de a? Qual é a primeira casa decimal de a? O que se pode dizer sobre a segunda casa decimal?

3 – Coloque os números em ordem crescente (do menor para o maior):

$$\frac{21}{9}; 2{,}45; 2{,}\bar{4}; \sqrt{9}$$

4 – (a) Dê um exemplo de um número racional entre 1 e 2.

(b) Dê um exemplo de um número racional entre 0,1 e 0,2.

(c) Dê um exemplo de um número racional entre 0,01 e 0,02.

(d) Dê um exemplo de dez números entre 1 e 2.

(e) Dê um exemplo de cinco números irracionais entre 1 e 2.

(f) Represente todos os números encontrados nos itens acima na reta real.

5 – Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta:

(a) Se um número é racional então sua expansão decimal é finita.

(b) Se um número tem expansão decimal finita então esse número é racional.

(c) Se um número tem expansão decimal infinita então ele é irracional.

(d) Entre dois números racionais sempre é possível encontrar outro racional.

6- É possível dizer se o número 5,143... é racional? Justifique sua resposta.

7- Ache uma aproximação para $\sqrt{3}$ com erro menor do que 0,01.

8- O número 4,20220022200022220000..., que tem os algarismos 2 e 0 repetindo alternadamente conforme o padrão apresentado, é racional? Por quê?

Bibliografia

MAOR, Eli. *e: a história de um número*. Rio de Janeiro: Record, 2003.

MORGADO, Augusto Cesar et al. *Progressões e matemática financeira*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

NIVEN, Ivan. *Números: racionais e irracionais*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

SMITH, David Eugene. *History of Mathematics*. vol. II. Ginn and Co.: Boston, 1925.

The MacTutor History of Mathematics Archive <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>.

Sobre os autores

Antonio Carlos Brolezzi

é professor do Departamento de Matemática do IME-USP. É mestre e doutor em Educação pela Faculdade de Educação da USP. Com experiência no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, trabalhou por vários anos com a formação de professores. Interessa-se pela pesquisa na área de História da Matemática e seu uso em sala de aula, bem como pelo uso da tecnologia na educação matemática.

Martha Salerno Monteiro

é docente do Instituto de Matemática e Estatística da USP. Fez doutorado na área de Análise Funcional na University of New Mexico, nos EUA. Desde 1998, é membro da diretoria do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (CAEM) do IME-USP.

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações