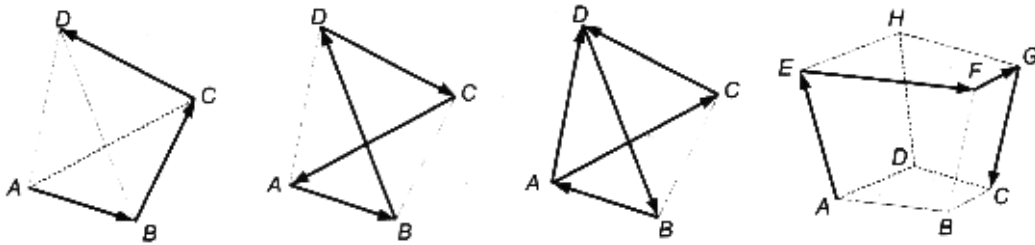


MAT 112 - VETORES E GEOMETRIA - IAG/IME
1º SEMESTRE 2020

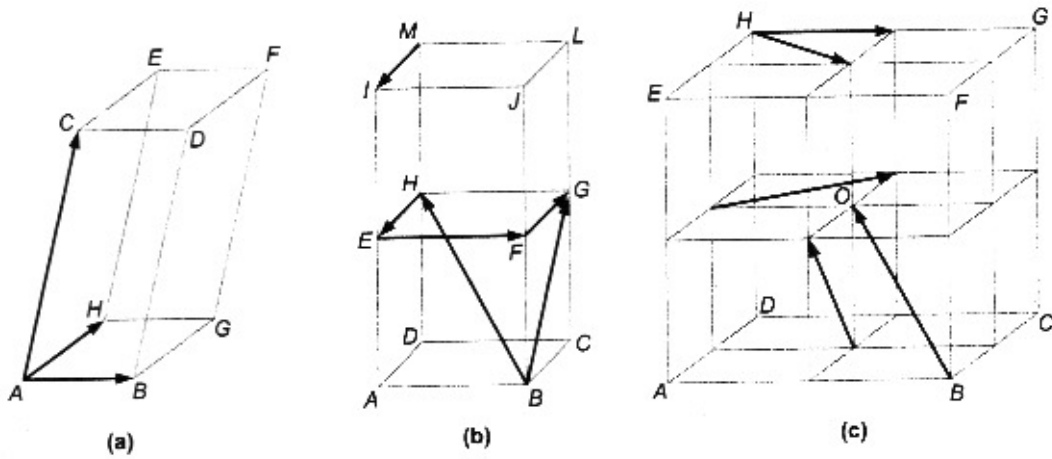
LISTA 1

1. Ache a soma dos vetores indicados na figura, nos casos:



2. Ache a soma dos vetores indicados em cada caso, sabendo-se que

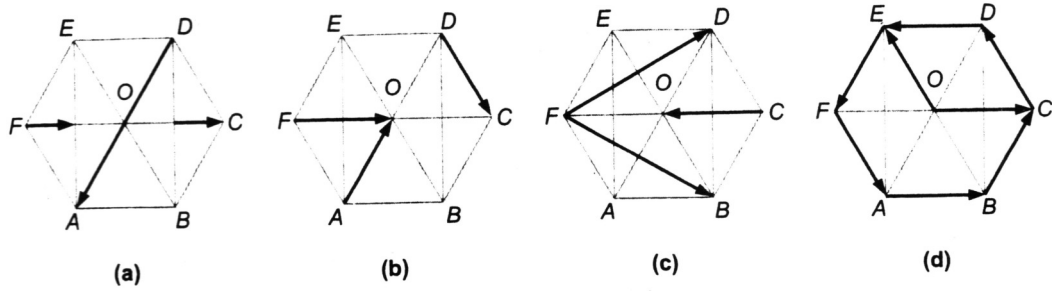
- (a) $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo.
- (b) $ABCDEFGH$ e $EFGHIJLM$ são cubos de arestas congruentes.
- (c) $ABCDEFGH$ é um cubo de centro O e está dividido em oito cubos congruentes por planos paralelos às faces.



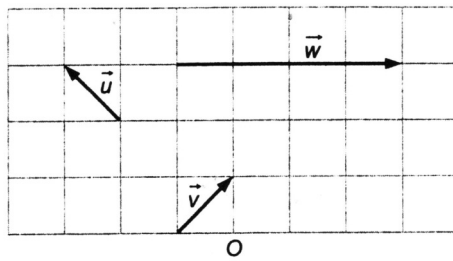
3. Utilize o paralelepípedo da Figura (a) acima para determinar o vetor \vec{x} em cada caso:

- (a) $\vec{x} = \vec{GH} - \vec{HE} - \vec{FE} + \vec{AE} + \vec{AB}$
- (b) $\vec{x} = \vec{HD} - \vec{CF} + \vec{DG} + \vec{BC} + \vec{AF} - \vec{BE}$
- (c) $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{HG} + \vec{AC} + \vec{DF} + \vec{CE} + \vec{BD}$

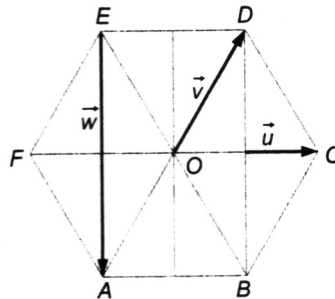
- 2 4. Na figura abaixo, os hexágonos são regulares. Em cada caso, determine a soma dos vetores indicados.



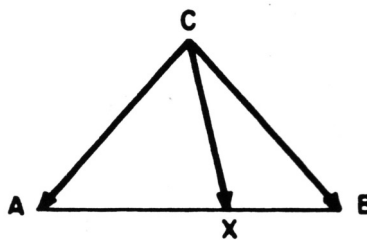
5. Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor $\vec{BC} + \vec{GH} - \vec{FA} - \vec{GC} + \vec{FB}$?
 6. Sendo \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} representados na figura abaixo, represente $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + \frac{5}{4}\vec{w}$ por uma flecha de origem O .



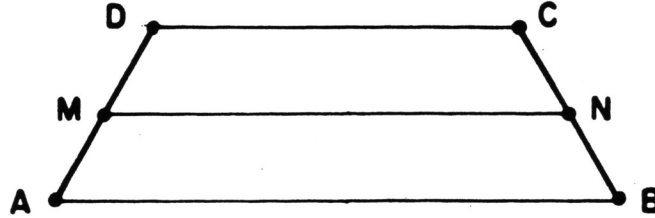
7. Na figura abaixo, $ABCDEF$ é um hexágono regular. Determine X , sabendo que $\vec{CX} = -3\vec{u} + 2\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{w}$.



8. Dados quatro pontos A , B , C e X tais que $\vec{AX} = m\vec{XB}$, exprima \vec{CX} em função de \vec{CA} , \vec{CB} e m . (Sugestão: na relação $\vec{AX} = m\vec{XB}$, faça aparecer C em ambos os membros.)



9. Sejam A um ponto e \vec{u} um vetor, prove que vale $(A + \vec{u}) - \vec{u} = A$.
10. Sejam A um ponto e \vec{u} um vetor, prove que vale $(A - \vec{u}) + \vec{v} = A - (\vec{u} - \vec{v})$.
11. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (*Atenção:* não é suficiente provar que $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



12. Num triângulo ABC , sejam M , N e P os pontos médios dos lados AB , BC e AC , respectivamente. Mostre que

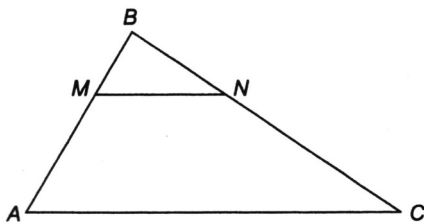
$$\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}.$$

13. Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O , prove que

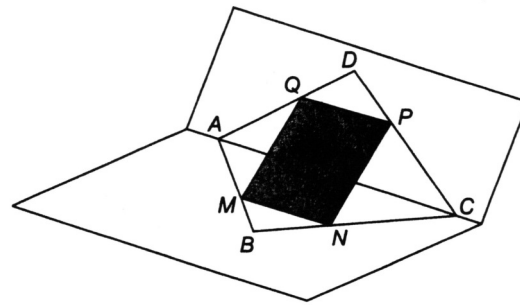
$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = 6\vec{AO}.$$

14. Seja $OABC$ um tetraedro e seja X o ponto da reta BC definido por $\vec{BX} = m\vec{BC}$. Exprima \vec{OX} e \vec{AX} em função de \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} .

15. (a) No triângulo ABC da figura (a), M divide o segmento AB e N divide o segmento CB na mesma razão r . Prove que $MN \parallel AC$ e calcule $\frac{\|\vec{MN}\|}{\|\vec{AC}\|}$.
- (b) No quadrilátero $ABCD$ (eventualmente reverso, como na figura (b)), M divide o segmento AB , N divide BC , P divide CD e Q divide AD , todos na mesma razão r . Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.
- (c) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ do item anterior seja um paralelogramo. Mostre que as quatro diagonais (as duas de $ABCD$ e as duas de $MNPQ$) têm um ponto em comum.



(a)

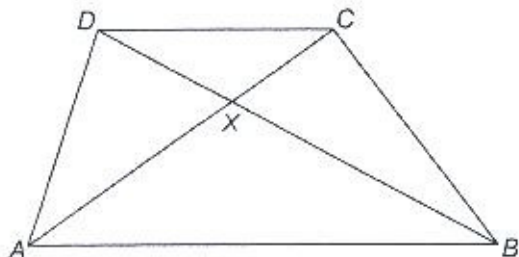


(b)

16. Sejam A , B e C pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que:

- (a) X pertence à reta AB se e somente se existem escalares α e β tais que $\vec{CX} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB}$ e $\alpha + \beta = 1$.
- (b) X pertence ao segmento AB se e somente se existem escalares α e β tais que $\vec{CX} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$.

- (c) X é interior ao segmento AB (isto é, existe um escalar λ tal que $0 < \lambda < 1$ e $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$) se e somente se \overrightarrow{XA} e \overrightarrow{XB} são de sentido contrário.
17. Prove que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é l.i., então:
- $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ é l.i.;
 - $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ é l.i.
18. Prove que $\{\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}\}$ é l.d. para quaisquer vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} .
19. Determine os escalares a e b sabendo que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.i. e que $(a - 1)\vec{u} + b\vec{v} = b\vec{u} - (a + b)\vec{v}$.
20. No trapézio $ABCD$ da figura abaixo, o comprimento de AB é o dobro do comprimento de CD . Exprima \overrightarrow{AX} com combinação linear de \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AB} .



Nos exercícios 25 a 30 abaixo, as coordenadas dos vetores são dadas em relação a uma base qualquer fixada.

21. Suponha $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$.
- Ache as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - 2\vec{v}$ e $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$.
 - Verifique se \vec{u} é combinação linear de \vec{v} e \vec{w} .
 - Escreva $\vec{r} = (4, 0, 13)$ como combinação linear de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .
22. $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$?
23. Decida se é l.d. ou se é l.i.:
- $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$;
 - $\vec{u} = (0, 1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 3, 1)$;
 - $\vec{u} = (1, -3, 14)$ e $\vec{v} = (\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1)$;
24. Determine m e n tais que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seja l.d., sendo que $\vec{u} = (1, m, n + 1)$ e $\vec{v} = (m, n, 10)$.
25. Ache m para que sejam l.d.:
- $\vec{u} = (m, 1, m)$ e $\vec{v} = (1, m, 1)$;
 - $\vec{u} = (1 - m^2, 1 - m, 0)$ e $\vec{v} = (m, m, m)$;
 - $\vec{u} = (m, 1, m + 1)$, $\vec{v} = (1, 2, m)$ e $\vec{w} = (1, 1, 1)$;
 - $\vec{u} = (m, 1, m + 1)$, $\vec{v} = (0, 1, m)$ e $\vec{w} = (0, m, 2m)$.
26. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base e $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ e $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$. Decida se $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base.
27. Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base, prove que $(\alpha_1\vec{e}_1, \alpha_2\vec{e}_2, \alpha_3\vec{e}_3)$ é uma base se, e somente se, α_1, α_2 e α_3 não são nulos. Interprete geometricamente.
28. Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio de BC .
- Explique por que $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ é uma base.
 - Determine as coordenadas de \vec{AM} nesta base.
29. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal. Calcule $\|\vec{u}\|$ nos seguintes casos:
- $\vec{u} = (1, 1, 1)_E$;
 - $\vec{u} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$;
 - $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$;
 - $\vec{u} = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.
30. Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária, calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$.

31. São dadas as coordenadas de \vec{u} e \vec{v} em relação a uma base ortonormal fixada. Calcule, em radianos, a medida angular entre \vec{u} e \vec{v} .
- $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$.
 - $\vec{u} = (3, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$.
 - $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
32. Determine x de modo que \vec{u} e \vec{v} sejam ortogonais.
- $\vec{u} = (x, x, 4)$, $\vec{v} = (4, x, 1)$.
 - $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$, $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$.
 - $\vec{u} = (x, -1, 4)$, $\vec{v} = (x, -3, 1)$.
33. Sejam λ um número real e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores quaisquer. Mostre que valem as propriedades:
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
 - $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
 - Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.
34. Obtenha um vetor \vec{u} ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e a $\vec{w} = (1, -2, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.
35. Dados $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, -1)$ e $\vec{t} = (2, 1, -1)$, obtenha \vec{u} de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a \vec{t} , tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja l.d. Algum dos vetores encontrados forma ângulo agudo com $(-1, 0, 0)$?
36. Sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $\|\vec{u}\| = \frac{3}{2}$, $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ e $\|\vec{w}\| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.
37. Sejam \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} vetores de norma 1 tais que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2}$. Verifique se \vec{w} é combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .
38. (a) Mostre que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
 (b) Calcule $\|2\vec{u} + 4\vec{v}\|^2$, sabendo que \vec{u} é unitário, $\|\vec{v}\| = 2$ e a medida angular entre \vec{u} e \vec{v} é $\frac{2\pi}{3}$ radianos.
39. Prove que:
- $4\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$;
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$;
 - as diagonais de um paralelogramo têm comprimentos iguais se, e somente se, o paralelogramo é um retângulo.
40. A medida angular em radianos entre \vec{u} e \vec{v} é $\frac{\pi}{4}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ e $\|\vec{v}\| = 1$. Calcule a medida angular em radianos entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.
41. Prove que:
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$;
 - a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados;
 - a diagonal maior de um paralelogramo é maior do que cada um dos quatro lados.
42. Prove que:
- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (**Desigualdade de Schwarz**)
 - $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (**Desigualdade Triangular**)
 - $\|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$
43. Mostre que a Desigualdade de Schwarz se torna uma igualdade se, e somente se \vec{u} e \vec{v} são l.d.