MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

Lista Final

2º Semestre de 2015

1. Dados os conjuntos a, b, c, prove que existe um único conjunto d tal que

$$x \in d \text{ se, e somente se, } (x \in a \text{ e } x \notin b) \text{ ou } (x \in b \text{ e } x \notin a).$$

   Indique em cada passagem o axioma utilizado.

2. Decida se cada afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

   (a) Para qualquer conjunto x, $\bigcup \wp(x) = x$.

   (b) Para qualquer conjunto x, $\wp(\bigcup x) = x$.

   (c) Para quaisquer conjuntos x e A, $x \setminus \bigcap A = \bigcup\{x \setminus a : a \in A\}$.

   (d) Se R é uma relação e $A \subseteq domR$, então $A \subseteq R^{-1}[R[A]]$.

   (e) Se R é uma relação e $A \subseteq domR$, então $A = R^{-1}[R[A]]$.

   (f) Se R é uma função e $A \subseteq domR$, então $A = R^{-1}[R[A]]$.

3. Considere a seguinte relação em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$R = \{(m, n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) : m \text{ divide } n\}.$$

   Com respeito à relação R:

   (a) Prove que R é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

   (b) Decida se R é uma ordem total em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

   (c) O conjunto $\{2, 3, 6\}$ tem máximo? Tem mínimo?

   (d) O conjunto $\{2, 3, 6\}$ tem elemento maximal? Tem elemento minimal?

   (e) O conjunto $\{2, 3, 6\}$ tem supremo? Tem ínfimo?

   (f) $(3, 6) \in R^{-1}$? Justifique sua resposta.

   (g) Determine $R[\{4, 6\}]$ e $R^{-1}[\{4, 6\}]$.

   Justifique sua resposta.

4. Sejam X, Y, A, B conjuntos. Prove que:
   (a) Se $X \subseteq Y$, então $|A^X| \leq |A^Y|$.
   (b) Se $|A| = |B|$, então $|\wp(A)| = |\wp(B)|$.
   (c) Se $|A| = |B|$ e $|X| = |Y|$, então $|A \times X| = |B \times Y|$.
5. Sejam X, Y conjuntos. Prove que:
   (a) Se X é finito, então $\wp(X)$ é finito e $|\wp(X)| = 2^{|X|}$.
   (b) Se X e Y são finitos disjuntos, então $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.
   (c) Se X e Y são finitos, então $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.
6. Sejam X, Y conjuntos. Prove que:
   (a) Se X e Y são enumeráveis disjuntos, então $X \cup Y$ é enumerável.
   (b) Se X e Y são enumeráveis, então $X \times Y$ é enumerável.
   (c) Se X é enumerável, então, para todo $n \geq 1$, X^n é enumerável.
7. Dado um conjunto X, prove que são equivalentes as seguintes afirmações:
   (a) Para todo $x \in X$, $x \subseteq X$.
   (b) Se $x \in y \in X$, então $x \in X$.
   (c) $\bigcup X \subseteq X$.
8. Prove que se S é um conjunto e para todo $x \in S$, x é transitivo, então $\bigcup S$ é transitivo.
9. Decida se cada $n \in \mathbb{N}$ é um ordinal e justifique sua resposta.
10. Decida se $\mathbb{N}$ é um ordinal e justifique sua resposta.