

MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

Lista 7

2º Semestre de 2015

1. Prove que:
 - (a) Se $|A| < |B|$ e $|B| \leq |C|$, então $|A| < |C|$.
 - (b) Se $|A| \leq |B|$ e $|B| < |C|$, então $|A| < |C|$.
2. Prove que se $A \subseteq B$, então $|A| \leq |B|$.
3. Prove que:
 - (a) $|A \times B| = |B \times A|$.
 - (b) $|(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)|$.
 - (c) Se $B \neq \emptyset$, então $|A| \leq |A \times B|$.
4. Mostre que $|S| \leq |\wp(S)|$.
5. Mostre que se $|A| = |B|$, então $|\wp(A)| = |\wp(B)|$.
6. Dados dois conjuntos A e $S \neq \emptyset$, mostre que $|A| \leq |A^S|$.
7. Mostre que se $S \subseteq T$, então $|A^S| \leq |A^T|$.
8. Mostre que se X e Y são finitos, então $X \times Y$ é finito e $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.
9. Mostre que se X é finito, então $|\wp(X)| = 2^{|X|}$.
10. Mostre que se X e Y são finitos, com $X \neq \emptyset$, então X^Y tem $|X|^{|Y|}$ elementos.
11. Mostre que se A e B são finitos e $X \subseteq A \times B$, então $|X| = \sum_{a \in A} k_a$, onde $k_a = |X \cap (\{a\} \times B)|$.
12. Suponha $|A_1| = |B_1|$ e $|A_2| = |B_2|$. Mostre que:
 - (a) Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, então $|A_1 \cup A_2| = |B_1 \cup B_2|$.
 - (b) $|A_1 \times A_2| = |B_1 \times B_2|$.
 - (c) $|\text{Seq}(A_1)| = |\text{Seq}(B_1)|$.
13. Todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável.
14. Mostre que a união entre um conjunto finito e um conjunto enumerável é enumerável.
15. Mostre que se $A \neq \emptyset$ é finito e B é enumerável, então $A \times B$ é enumerável.
16. Seja A um conjunto enumerável. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \neq 0$, o conjunto $[A]^n = \{S \subseteq A : |S| = n\}$ é enumerável.
17. Uma sequência $\langle s_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ de números naturais é *eventualmente constante* se existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{N}$ tais que $s_n = s$ para todo $n \geq n_0$. Mostre que o conjunto de todas as sequências eventualmente constantes de números naturais é enumerável.
18. Uma sequência $\langle s_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ de números naturais é *eventualmente periódica* se se existem $n_0, p \in \mathbb{N}$, com $p \geq 1$, tais que $s_{n+p} = s_n$ para todo $n \geq n_0$. Mostre que o conjunto de todas as sequências periódicas de números naturais é enumerável.
19. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as progressões aritméticas em $\mathbb{N}$. Considere a função $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ dada por $f(s_0, d) = \langle s_0 + nd \mid n \in \mathbb{N} \rangle$.