

# MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

## Lista 6

2º Semestre de 2015

1. Mostre que não existe  $z$  tal que  $x \subsetneq z \subsetneq s(x)$ .
2. Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Prove que não existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n < k < s(n)$ .
3. Use o exercício 2 para provar que, dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , se  $m < n$ , então  $s(m) \leq n$ . Conclua que a função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $f(n) = s(n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , é injetora.
4. Prove que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \neq 0$ , existe um único  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n = s(k)$ .
5. Prove que cada número natural  $n$  é o conjunto de todos os números naturais menores que  $n$ , isto é,

$$n = \{ m \in \mathbb{N} \mid m < n \}.$$

*Dica:* Use indução para provar que todos os elementos de um número natural são números naturais.

6. Mostre que, para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$m < n \quad \text{se, e somente se,} \quad m \subsetneq n.$$

7. Prove que não existe uma função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $f(n) > f(s(n))$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
8. Seja  $\mathbf{P}(x)$  uma propriedade. Seja  $k \in \mathbb{N}$  e suponha que

(a)  $\mathbf{P}(0)$  vale.

(b) Para cada  $n < k$ ,  $\mathbf{P}(n)$  implica  $\mathbf{P}(n+1)$ .

Então, para todo  $n \leq k$ ,  $\mathbf{P}(n)$  vale.

9. Prove a lei associativa da adição, isto é,

$$(k + m) + n = k + (m + n) \text{ para todos } k, m, n \in \mathbb{N}.$$

10. Dados  $m, n, k \in \mathbb{N}$ , mostre que  $m < n$  se, e somente se,  $m + k < n + k$ .
11. Dados  $m, n, k \in \mathbb{N}$ , mostre que  $m \leq n$  se, e somente se, existe um único  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n = m + k$ .
12. Prove que existe uma única função  $\cdot$  (*multiplicação*) de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  em  $\mathbb{N}$  satisfazendo:

(i)  $m \cdot 0 = 0$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ ;

(ii)  $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$  para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ .

13. Prove que a multiplicação é:

**Comutativa:**  $m \cdot n = n \cdot m$  para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ ;

**Associativa:**  $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$  para todos  $k, m, n \in \mathbb{N}$ ;

**Distributiva sobre a adição:**  $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$  para todos  $k, m, n \in \mathbb{N}$ .

14. Dados  $m, n, k \in \mathbb{N}$ , com  $k > 0$ , mostre que  $m < n$  se, e somente se,  $m \cdot k < n \cdot k$ .