

MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

Lista 5

2º Semestre de 2015

1. Mostre que se $Im(f) \subseteq dom(g)$, então $dom(g \circ f) = dom(f)$.
2. Para cada f abaixo, verifique se f é função e, em caso afirmativo, se é injetora. Quando possível, ache a inversa (quando f não for sobrejetora, defina a inversa considerando a imagem de f). Determine $Im(f)$.

(a) $f = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x^2 \};$

(e) $f = \{ (x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \};$

(b) $f = \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y = 0 \};$

(f) $f = \{ (x, \frac{1}{|x|}) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \};$

(c) $f = \{ (x, x^{\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \};$

(g) $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x \};$

(d) $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^{\frac{1}{3}} \};$

(h) $f = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \mid y \}.$

3. Para cada item abaixo, use a função f do item correspondente do exercício 2 e ache $f[X]$ e $f^{-1}[Y]$.

(a) $X = \{ 2k : k \in \mathbb{N} \}$ e
 $Y = \{ 2k + 1 : k \in \mathbb{N} \};$

(e) $X = Y = \{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2 \};$

(b) $X = Y = \mathbb{N};$

(f) $X = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \}$ e $Y = \mathbb{R};$

(c) $X = \mathbb{N}$ e $Y = \mathbb{Z};$

(g) $X = Y =]1, 2[;$

(d) $X = Y = \{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 \};$

(h) $X = \{ x \in \mathbb{R} : x > 1 \}$ e
 $Y = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}.$

4. Considere as seguintes funções:

$$f_1 = \{ (x, 2x - 1) \mid x \in \mathbb{R} \},$$

$$f_2 = \left\{ \left(x, x^{\frac{1}{2}} \right) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0 \right\},$$

$$f_3 = \left\{ \left(x, x^{\frac{1}{3}} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \text{ e}$$

$$f_4 = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0 \right\}.$$

Determine os domínios e imagens de cada uma das seguintes funções: $f_2 \circ f_1$, $f_1 \circ f_2$, $f_3 \circ f_1$, $f_1 \circ f_3$, $f_4 \circ f_1$, $f_1 \circ f_4$, $f_2 \circ f_4$, $f_4 \circ f_2$ e $f_3 \circ f_4$.

5. Mostre que:

(a) se f é uma função inversível, então $f^{-1} \circ f = Id_{dom(f)}$ e $f \circ f^{-1} = Id_{Im(f)}$;

(b) dada uma função f , se existem funções g e h tais que $g \circ f = Id_{dom(f)}$ e $f \circ h = Id_{Im(f)}$, então f é inversível e $f^{-1} = g = h$.

6. Mostre que se f e g são funções injetoras, então $g \circ f$ também é uma função injetora e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
7. Seja f uma função. Mostre que:
- (a) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$; (b) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.
8. Verifique se cada uma das relações abaixo é reflexiva, simétrica ou transitiva.
- (a) $>$ sobre $\mathbb{Z}$. (d) $\subseteq$ e $\subsetneq$ sobre $\wp(A)$.
(b) $|$ sobre $\mathbb{Z}$. (e) $\emptyset$ sobre $\emptyset$.
(c) $\neq$ sobre $\mathbb{N}$. (f) $\emptyset$ sobre um conjunto A não-vazio.
9. Seja f uma função sobrejetora de A em B . Defina uma relação E sobre A do seguinte modo: xEy se, e somente se, $f(x) = f(y)$.
- (a) Mostre que E é uma relação de equivalência sobre A .
(b) Defina uma função g de A/E em B por $g([a]_E) = f(a)$. Verifique que g está bem-definida — i.e., $[a]_E = [a']_E$ implica $g([a]_E) = g([a']_E)$ — e é sobrejetora.
(c) Seja $j: A \rightarrow A/E$ a função dada por $j(a) = [a]_E$. Mostre que $g \circ j = f$.
10. Dê exemplos de relações sobre $\mathbb{R}$ que são:
- (a) reflexivas, mas não são simétricas nem transitivas;
(b) reflexivas e simétricas, mas não são transitivas.
11. Seja R uma ordem de A . Prove que R^{-1} é também uma ordem de A e, para $B \subseteq A$,
- (a) a é o *elemento mínimo* de B em R^{-1} se, e somente se, a é o *elemento máximo* de B em R ;
(b) a é um *elemento minimal* de B em R^{-1} se, e somente se, a é um *elemento maximal* de B em R ;
(c) a é o *supremo* de B em R^{-1} se, e somente se, a é o *ínfimo* de B em R ;
12. Dê exemplos de um conjunto ordenado finito $(A, <)$ e um subconjunto B de A tais que:
- (a) B possui elemento máximo;
(b) B não possui elemento mínimo;
(c) B não possui elemento máximo, mas B tem supremo;
(d) B não tem supremo.
13. Sejam R uma ordem de A e $B \subseteq A$. Mostre que $R \cap B^2$ é uma ordem de B .
14. Considere $\wp(X)$, onde $X \neq \emptyset$. Mostre que:
- (a) qualquer $S \subseteq A$ tem supremo na ordem $\subseteq_A$ e $\sup S = \bigcup S$;
(b) qualquer $S \subseteq A$ tem ínfimo em $\subseteq_A$; se $S \neq \emptyset$, então $\inf S = \bigcap S$; $\inf \emptyset = X$.