

MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

Lista 4

2º Semestre de 2015

1. Prove que $X \times Y = \emptyset$ se, e somente se, $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$.
2. Mostre que para quaisquer conjuntos X , Y e Z , valem:
 - (a) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$;
 - (b) $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$;
 - (c) $(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z)$.
3. Prove que $(a, b) \in \wp(\wp(\{a, b\}))$ e $a, b \in \bigcup(a, b)$. De forma geral, se $a \in A$ e $b \in A$, então $(a, b) \in \wp(\wp(A))$.
4. Prove que (a, b) , (a, b, c) e (a, b, c, d) existem para todos a, b, c e d .
5. Mostre que se $(a, b) = (b, a)$, então $a = b$.
6. Prove que $(a, b, c) = (a', b', c')$ implica $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. Afirme e prove uma propriedade análoga para quádruplas.
7. Encontre a, b e c tais que $((a, b), c) \neq (a, (b, c))$.
8. Seja R uma relação binária. Mostre que $\text{dom}(R) \subseteq \bigcup(\bigcup R)$ e $\text{Im}(R) \subseteq \bigcup(\bigcup R)$. Conclua a partir disto que $\text{dom}(R)$ e $\text{Im}(R)$ existem.
9. (a) Dadas R e S relações binárias, mostre que R^{-1} e $S \circ R$ existem.
Sugestão: Note que $R^{-1} \subseteq (\text{Im}(R)) \times (\text{dom}(R))$ e $S \circ R \subseteq (\text{dom}(R)) \times (\text{Im}(S))$.
(b) Para A, B e C conjuntos, mostre que $A \times B \times C$ existe.
10. Sejam R uma relação binária e A e B conjuntos. Prove que:
 - (a) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$;
 - (b) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$; dê um exemplo onde a igualdade não vale;
 - (c) $R[A \setminus B] \supseteq R[A] \setminus R[B]$; dê um exemplo onde a igualdade não vale;
 - (d) os itens (10a) – (10c) continuam valendo, com R^{-1} em lugar de R ;
 - (e) $R^{-1}[R[A]] \supseteq A$ e $R[R^{-1}[B]] \supseteq B$; dê exemplos onde a igualdade não vale.
11. Seja $R \subseteq X \times Y$. Prove que:
 - (a) $R[X] = \text{Im}(R)$ e $R^{-1}[Y] = \text{dom}(R)$;
 - (b) se $a \notin \text{dom}(R)$, então $R[\{a\}] = \emptyset$; se $b \notin \text{Im}(R)$, então $R^{-1}[\{b\}] = \emptyset$;
 - (c) $\text{dom}(R) = \text{Im}R^{-1}$; $\text{Im}(R) = \text{dom}R^{-1}$;

$$(d) (R^{-1})^{-1} = R;$$

$$(e) R^{-1} \circ R \supseteq Id_{dom(R)} \text{ e } R \circ R^{-1} \supseteq Id_{Im(R)}.$$

12. Sejam $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $Y = \wp(X)$. Descreva:

$$(a) \in_Y;$$

$$(b) Id_Y.$$

Determine o domínio, a imagem e o corpo de ambas as relações.

13. Prove que para quaisquer três relações binárias R , S e T ,

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

14. Dê exemplos de conjuntos X , Y e Z tais que

$$(a) X \times Y \neq Y \times X;$$

$$(c) X^3 \neq X \times X^2.$$

$$(b) X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z;$$

15. Prove que:

$$(a) A \times B = \emptyset \text{ se, e somente se, } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset;$$

$$(b) (A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B) \text{ e } A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2);$$

$$(c) \text{ o item (15b) continua válido, com } \cup \text{ substituído por } \cap, \setminus \text{ e } \Delta.$$

16. Prove que se $X \times Z \subseteq Y \times T$ e $X \times Z \neq \emptyset$, então $X \subseteq Y$ e $Z \subseteq T$. Dê um exemplo mostrando que a hipótese de que $X \times Z \neq \emptyset$ é essencial.