

# MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

## Lista 3

2º Semestre de 2015

1. Dados  $x$  e  $y$  conjuntos, mostre que existe um conjunto formado por todos os elementos de  $x$  que não são elementos de  $y$ .
2. Prove que para qualquer conjunto  $a$ , existe  $x \notin a$ .
3. Sejam  $a$  e  $b$  conjuntos. Mostre que existe um único conjunto  $c$  tal que  $x \in c$  se, e somente se, ou  $x \in a$  e  $x \notin b$  ou  $x \in b$  e  $x \notin a$ .
4. Mostre que, dados  $a$ ,  $b$  e  $c$  conjuntos, existe um único conjunto  $x$  tal que  $y \in x$  se, e somente se,  $x = a$  ou  $x = b$  ou  $x = c$ .
5. Mostre que  $\wp(x) \not\subseteq x$  para qualquer conjunto  $x$ . Note que, em particular,  $\wp(x) \neq x$ .  
*Sugestão:* Considere  $y = \{u \in x \mid u \notin u\}$  e mostre que  $y \in \wp(x)$ , mas  $y \notin x$ .

6. Sejam  $x, y$  e  $z$  conjuntos quaisquer. Prove as seguintes propriedades:

**COMUTATIVIDADE:**  $x \cap y = y \cap x$  e  $x \cup y = y \cup x$ .

**ASSOCIATIVIDADE:**  $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$  e  $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ .

**DISTRIBUTIVIDADE:**  $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$  e  $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ .

**LEIS DE MORGAN:**  $z \setminus (x \cap y) = (z \setminus x) \cup (z \setminus y)$  e  $z \setminus (x \cup y) = (z \setminus x) \cap (z \setminus y)$ .

7. Sejam  $a$  e  $b$  conjuntos. Mostre que:

(a) se  $a \in b$ , então  $a \subseteq \bigcup b$ ;

(b) se  $u \subseteq a$ , para todo  $u \in b$ , então  $\bigcup b \subseteq a$ .

8. Para um conjunto não-vazio  $a$ , mostre que

(a) se  $x \in a$  então  $\bigcap a \subseteq x$ ;

(b) se  $x \subseteq u$ , para todo  $u \in a$ , então  $x \subseteq \bigcap a$ .

9. Mostre que são equivalentes:

(a)  $a \subseteq b$ ;

(b)  $a \cap b = a$ ;

(c)  $a \cup b = b$ ;

(d)  $a \setminus b = \emptyset$ .

10. Mostre que:

(a)  $a \subseteq b$  se, e somente se,  $a \cap b = a$  se, e somente se,  $a \cup b = b$  se, e somente se,  $a \setminus b = \emptyset$ .

(b)  $a \cap (b \setminus c) = (a \cap b) \setminus c$ .

(c)  $a \subseteq b \cap c$  se, e somente se,  $a \subseteq b$  e  $a \subseteq c$ .

- (d)  $b \cup c \subseteq a$  se, e somente se,  $b \subseteq a$  e  $c \subseteq a$ .
- (e)  $a \setminus b = (a \cup b) \setminus b = a \setminus (a \cap b)$ .
- (f)  $a \cap b = a \setminus (a \setminus b)$ .
- (g)  $a \setminus (b \setminus c) = (a \setminus b) \cup (a \cap c)$ .
- (h)  $a \cap b = a$  e  $a \cup b = a$  se, e somente se,  $a = b$ .

11. Para  $a, b \subseteq x$ , prove que:

- (a)  $a \subseteq b$  se, e somente se,  $x \setminus a \supseteq x \setminus b$ ;
- (b)  $a = b$  se, e somente se,  $x \setminus a = x \setminus b$ .

12. Determine  $\bigcup\{A_i \mid i \in I\}$  e  $\bigcap\{A_i \mid i \in I\}$  para:

- (a)  $A_i = \{0, 1, i, i + 1\}$  e  $I = \mathbb{N}$ ;
- (b)  $A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq i\}$  e  $I = \mathbb{N}$ ,  $I = \{\text{números ímpares}\}$  e  $I = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq 3\}$ .

13. Sejam  $a, b$  e  $x$  conjuntos tais que  $a, b \subseteq x$  e  $a \neq b$ . Considere o conjunto

$$U = \{u \subseteq x \mid a \in u\} \cup \{v \subseteq x \mid b \in v\}.$$

Mostre que se  $V$  é uma coleção não-vazia de elementos de  $U$ , então  $\bigcup V \in U$ . O mesmo vale para a intersecção?

14. Mostre que para quaisquer conjuntos  $x$  e  $y$ :

- (a)  $\bigcup\{x\} = x$ ;
- (b)  $\bigcup\{x, y\} = x \cup y$ ;
- (c)  $\bigcap\{x, y\} = x \cap y$ ;
- (d)  $\bigcup\varnothing(x) = x$ ;
- (e)  $\bigcap\varnothing(x) = \emptyset$ ;
- (f)  $x \cap \{y\} \neq \emptyset$  se, e somente se,  $y \in x$ .

15. Seja  $A$  uma família de subconjuntos de  $x$ . Mostre que:

- (a)  $x \setminus \bigcup A = \bigcap\{x \setminus a : a \in A\}$ ;
- (b)  $x \setminus \bigcap A = \bigcup\{x \setminus a : a \in A\}$ .

16. Sejam  $A$  uma família não-vazia de subconjuntos de um conjunto  $x$  e  $b \subseteq x$ . Mostre que:

- (a)  $b \cap (\bigcup A) = \bigcup\{b \cap a : a \in A\}$ ;
- (b)  $b \cup (\bigcap A) = \bigcap\{b \cup a : a \in A\}$ .

17. Sejam  $A \subseteq \varnothing(x)$  não-vazio e  $b \subseteq x$ . Mostre que:

- (a)  $b \cup (\bigcup A) = \bigcup\{b \cup a : a \in A\}$ ;
- (b)  $b \cap (\bigcap A) = \bigcap\{b \cap a : a \in A\}$ .