

# MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

## Lista 2

2º Semestre de 2015

1. Escreva exemplos de conjuntos  $x$  e  $y$  tais que  $x = y$ ,  $x \neq y$ ,  $x \subseteq y$ ,  $x \not\subseteq y$  e  $x \subsetneq y$ .
2. Diga precisamente o que significa dois conjuntos serem diferentes,  $x \not\subseteq y$  e  $x \subsetneq y$ .
3. Diga se são *verdadeiras* ou *falsas* as afirmações:

- |                             |                                      |                                      |
|-----------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $3 \in \{3\}$ ;         | (c) $\{4\} \in \{4, \{4\}\}$ ;       | (e) $\{2, 8\} \subset \{2, 8, 9\}$ . |
| (b) $\emptyset \in \{3\}$ ; | (d) $\{4\} \subseteq \{4, \{4\}\}$ ; |                                      |

4. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e justifique.

- |                                               |                                                   |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| (a) $\{a, b\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$ ;   | (e) $\emptyset \in \emptyset$ ;                   |
| (b) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, a\}$ ;          | (f) $\emptyset \subseteq \emptyset$ ;             |
| (c) $a \in \{\{a\}\}$ ;                       | (g) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset\}$ . |
| (d) $a \in \{b\}$ se, e somente se, $a = b$ ; |                                                   |

5. Escreva explicitamente os seguintes conjuntos:

- |                                                                  |                                                            |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| (a) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < 9\}$ ;           | (d) $\{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ ; |
| (b) $\{2r \mid r \in \mathbb{R}\}$ ;                             | (e) $\{i \mid i \in \{j\}\}$ .                             |
| (c) $\{rq \mid r \in \mathbb{R} \text{ e } q \in \mathbb{Q}\}$ ; |                                                            |

6. Como é o conjunto  $\wp(\{a, b, c\})$ ? E  $\wp(\emptyset)$ ? E  $\wp(\{\emptyset\})$ ?
7. Ache  $\wp(\{1\})$ ,  $\wp(\{1, 2\})$  e  $\wp(\{1, 2, 3\})$ . Quantos elementos você acha que tem o conjunto  $\wp(\{1, 2, 3, 4\})$ ? E o conjunto  $\wp(\{1, 2, \dots, n\})$ , onde  $n$  é um inteiro positivo?
8. Para  $E$  um conjunto qualquer, julgue em verdadeira ou falsa as seguintes sentenças:

- |                      |                            |                                |                          |
|----------------------|----------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| (a) $E \in \wp(E)$ ; | (b) $E \subseteq \wp(E)$ ; | (c) $\{E\} \subseteq \wp(E)$ ; | (d) $\{E\} \in \wp(E)$ . |
|----------------------|----------------------------|--------------------------------|--------------------------|

9. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e justifique.

- |                                                      |
|------------------------------------------------------|
| (a) $x \in X$ se, e somente se, $\{x\} \in \wp(X)$ ; |
|------------------------------------------------------|

- (b)  $\{x\} \in \wp(X)$  se, e somente se,  $\{x\} \subseteq X$ ;  
(c)  $\{x\} \subseteq \wp(X)$  se, e somente se,  $x \subseteq X$ ;  
(d)  $\emptyset \in \wp(X)$ .
10. Mostre que para quaisquer conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , temos:
- (a) se  $A \subseteq \emptyset$ , então  $A = \emptyset$ ;  
(b) se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ , então  $A \subseteq C$ ;  
(c) se  $A \subseteq B$ , então  $\wp(A) \subseteq \wp(B)$ .
11. Prove ou dê um contra-exemplo.
- (a)  $A \neq B$  e  $B \neq C \Rightarrow A \neq C$ ;                      (c)  $x \in B$  e  $B \in C \Rightarrow x \in C$ ;  
(b)  $A \subseteq B$  e  $B \not\subseteq C \Rightarrow A \not\subseteq C$ ;                      (d)  $A \in B$  e  $B \not\subseteq C \Rightarrow A \notin C$ .
12. Os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são tais que  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ ; além disso,  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $c \in C$ ,  $d \notin A$ ,  $e \notin B$  e  $f \notin C$ . Dizer quais das seguintes sentenças são sempre verdadeiras:
- (a)  $a \in C$ ;    (b)  $b \in A$ ;    (c)  $c \notin A$ ;    (d)  $d \in B$ ;    (e)  $e \notin A$ ;    (f)  $f \notin A$ .
13. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos quaisquer. Mostre que se  $A \subseteq B$ ,  $B \subseteq C$  e  $C \subseteq A$ , então  $A = B$ ,  $B = C$  e  $C = A$ .
14. Escreva explicitamente o conjunto  $\wp(X)$ , onde:
- (a)  $X = \emptyset$ ;                      (c)  $X = \{3, \{1, 4\}\}$ ;                      (e)  $X = \wp(\{a\})$ ;  
(b)  $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ;                      (d)  $X = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ ;                      (f)  $X = \wp(\{a, b\})$ .
15. Prove ou dê um contra-exemplo.
- (a)  $\{x\} \in \wp(X) \Leftrightarrow x \subseteq X$ ;                      (f)  $\{\{a, b\}\} \subseteq \wp(\{a, b\})$ ;  
(b)  $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \wp(\{a, b\})$ ;                      (g)  $\{\{a, b\}\} \in \wp(\{a, b\})$ ;  
(c)  $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \wp(\{a, b\})$ ;                      (h)  $\{2, 3, 4, 5\} \in \wp(\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\})$ .  
(d)  $\{a, b\} \subseteq \wp(\{a, b\})$ ;  
(e)  $\{a, b\} \in \wp(\{a, b\})$ ;
16. Escreva explicitamente os conjuntos:
- (a)  $\{X \in \wp(\mathbb{N}) \mid X \in \wp(\{1, 2, 3\}) \text{ e } X \in \wp(\{2, 5\})\}$ ;  
(b)  $\{X \in \wp(\mathbb{N}) \mid X \in \wp(\{1, 3, 8\}) \text{ e } 8 \in X\}$ .