MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

Lista 1

2^{o} Semestre de 2015

Exercício 1. Identifique a hipótese e a tese em cada uma das seguintes afirmações:

(a) Se n é inteiro, então $2n$ é um número par.

(b) Você pode trabalhar aqui somente se tiver um diploma universitário.

(c) Um carro não anda, sempre que está sem combustível.

(d) Eu receberei a bandeirada, se cruzar a linha de chegada primeiro.

(e) Continuidade é uma condição necessária para diferenciabilidade.

(f) Normalidade é condição suficiente para regularidade.

(g) Eu tenho sono na aula das 14h, sempre que almoço no bandejão.

(h) $f(x) = 5$ dado que $x > 3$.

Exercício 2. Sejam p e q as sentenças "$2 < 3$" e "$0 + 1 = 1$", respectivamente. Construa as sentenças:

(a) $p \wedge q$;

(b) $p \vee q$;

(c) $\neg(p \vee q)$;

(d) $\neg(p \wedge q)$;

(e) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

Exercício 3. Sejam p e q sentenças quaisquer. Escreva as sentenças abaixo usando apenas $\wedge$ e $\neg$:

(a) $p \vee q$;

(b) $p \rightarrow q$;

(c) $p \leftrightarrow q$.

Exercício 4. Sejam p e q sentenças. Quando escrevemos $p \vee q$ podemos ter p e q ao mesmo tempo. Escreva uma fórmula (usando os conectivos $\vee, \wedge$ e $\neg$) que diga que temos p ou q mas que não podemos ter p e q ao mesmo tempo.

Exercício 5. Escreva a negação de cada uma das seguintes afirmações:

(a) Para todo número x maior ou igual a zero, $|x| = x$.

(b) f é contínua em todos os pontos.

(c) Existe um ponto onde f é contínua.

(d) Existe um elemento neutro com relação a adição.

(e) Por quaisquer dois pontos passa uma reta.

(f) Por quaisquer dois pontos passa uma única reta.

(g) Todas as cadeiras têm quatro pernas.

(h) Todo jogador de futebol é inteligente.

(i) $\exists x > 1\ (f(x) = 3)$.

(j) $\forall x > 1\ (0 < f(x) < 4)$.

(k) $\exists x \in A\ (f(x) > x)$.

(l) $\exists y \leq 2\ (f(y) < 2$ ou $g(y) \geq 7)$.

(m) $\forall x \in A\ \exists y \in B\ (x < y < 1)$.

(n) $\exists x \exists y\ (x + y = 8)$.

(o) $\forall x \exists y\ (x < y \vee y < x)$.

(p) $\exists x \forall y\ (y < x)$.

(q) $\forall x \exists y\ (x < y)$.

(r) $\forall x \exists y \forall z\ (x + y + z \leq xyz)$.

Exercício 6. Para cada afirmação abaixo, (i) reescreva a condição da definição usando somente simbologia lógica ($\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, etc); (ii) escreva a negação da parte (i) usando da mesma simbologia. **Não é necessário entender precisamente o que cada termo diz**.

(a) Uma função f é *par* se, e somente se, para todo x, $f(-x) = f(x)$.

(b) Uma função f é *periódica* se, e somente se, existe um $k > 0$, tal que, para todo x, $f(x + k) = f(x)$.

(c) Uma função f é *crescente* se, e somente se, para todo x e para todo y, se $x \leq y$, então $f(x) \leq f(y)$.

(d) Uma função f é *estritamente decrescente* se, e somente se, para todo x e para todo y, se $x < y$, então $f(x) > f(y)$.

(e) Uma função $f\colon A \to B$ é *injetora* se, e somente se, para todos x e y em A, se $f(x) = f(y)$, então $x = y$.

(f) Uma função $f\colon A \to B$ é *sobrejetora* se, e somente se, para todo y em B, existe x em A, tal que, $f(x) = y$.

(g) Uma função $f\colon D \to \mathbb{R}$ é *contínua* em $c \in D$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $|f(x) - f(c)| < \epsilon$, sempre que $|x - c| < \delta$ e $x \in D$.

(h) Uma função f é *uniformemente contínua* num conjunto S se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, sempre que x e y estão em S e $|x - y| < \delta$.

(i) O número real L é limite da função $f\colon D \to \mathbb{R}$ no ponto c se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $|f(x) - L| < \epsilon$, sempre que $x \in D$ e $0 < |x - c| < \delta$.