MAT 112 - VETORES E GEOMETRIA
1º SEMESTRE 2015

PROVA 1 - IME

Nome: ____ Nº USP: ________________

1. (2,5) Fixe uma base ortonormal positiva e sejam $\vec{u} = (3, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 1, 0)$.
   (a) Determine todos os vetores $\vec{x}$ de comprimento $\sqrt{10}$, ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
   (b) Determine todos os vetores $\vec{w}$ de comprimento $\frac{10}{7}$, ortogonais a $\vec{u}$ e tais que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja l.d. Qual deles forma ângulo agudo com $\vec{v}$? Justifique sua resposta.

2. (2,5) Considere um triângulo ABC e suponha que X, Y e Z são tais que

$$\vec{AZ} = \lambda \vec{AB}, \quad \vec{YC} = \lambda \vec{AC} \quad \text{e} \quad \vec{BX} = \lambda \vec{BC},$$

para algum $0 < \lambda < 1$.

(a) Escreva $\vec{XY}$ e $\vec{XZ}$ como combinação linear de $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$, em função de λ.

(b) Calcule $\vec{XY} \cdot \vec{XZ}$ em função de λ, sabendo que $||\vec{AB}|| = 2$, $||\vec{AC}|| = 1$ e a medida do ângulo entre $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ é de $\frac{\pi}{3}$.

(c) Determine λ de forma que $\vec{XY}$ e $\vec{XZ}$ sejam ortogonais.

3. (3,0) Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal positiva.

   (a) Construa **uma** base ortonormal positiva $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ de forma que $\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{f}_3\}$ seja l.d. e $\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{f}_1, \vec{f}_3\}$ seja l.d.

   (b) Determine as coordenadas do vetor $(2, 1, 1)_E$ na base F.

   (c) Determine as coordenadas do vetor $(2, 1, 1)_F$ na base E.

4. (2,0) Fixe uma orientação de V^3 e sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

   (i) Se $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$ e $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.i., então $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + ||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2 = 1$.

   (ii) $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base de V^3 se, e somente se, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.i.