MAT 112 - VETORES E GEOMETRIA
1º SEMESTRE 2015

PROVA 1 - IF

Nome: ____ Nº USP: _______________

1. (1,5) Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal positiva e $F = (\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.

   (a) Determine as coordenadas do vetor $(2, 1, 1)_E$ na base F.

   (b) Determine as coordenadas do vetor $(2, 1, 1)_F$ na base E.

2. (1,5) Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal positiva. Construa **uma** base ortonormal positiva $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ de forma que $\{(1,2,2)_E, \vec{f}_3\}$ seja l.d. e $\{\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ seja l.d.

3. (2,0) Fixe uma base ortonormal positiva e sejam $\vec{u} = (1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 0, 1)$.

   (a) Determine todos os vetores $\vec{w}$ de comprimento 1 e ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   (b) Decida para quais deles temos que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base.

   (c) Decida para quais deles temos que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal.

   (d) Decida para quais deles temos que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base positiva.

4. (3,0) Considere um triângulo ABC e suponha que X, Y e Z são tais que

$$\vec{AZ} = \frac{1}{2}\vec{AB}, \quad \vec{YC} = \frac{1}{3}\vec{AC} \quad \text{e} \quad \vec{BX} = \lambda\vec{BC},$$

para algum $0 < \lambda < 1$ e seja P o ponto na intersecção de $\overline{CZ}$ e $\overline{BY}$.

(a) Escreva $\vec{AX}$ como combinação linear de $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$, em função de λ.

(b) Escreva $\vec{AP}$ como combinação linear de $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

(c) Determine λ de forma que $\{\vec{AP}, \vec{AX}\}$ seja l.d.

5. (2,0) Fixe uma orientação de V^3. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

   (i) Se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ e $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.i., então $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = 1$.

   (ii) $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base de V^3 se, e somente se, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.i.