MAT 112 - VETORES E GEOMETRIA - IF/IME
1º SEMESTRE 2015

LISTA 3

Suponha fixado um sistema de coordenadas ortogonal cuja base é positiva.

1. Sejam $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$ e $r : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$. Determine os pontos de r equidistantes de A e B.
2. Estude a posição relativa das retas r e s.
   (a) $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ e $s : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$
   (b) $r : X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$ e $s : X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$
   (c) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ e $s : x = -y = \frac{z-1}{4}$
   (d) $r : x + 3 = \frac{2y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$ e $s : X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$.
3. No exercício acima, obtenha, quando for o caso, o ponto de interseção das retas r e s.
4. Determine m para que as retas $r : X = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, 3)$ e $X = (0, 1, -1) + \lambda(1, m, 2m)$ sejam coplanares, e nesse caso estude sua posição relativa.
5. Em cada item, ache o $\cos\theta$, onde θ é a medida do ângulo entre as retas r e s:
   (a) $r : X = (2, 0, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$ e $s : X = (7, 1, 3) + \lambda(4, 2, 3)$.
   (b) $r : 1 - x = \frac{y-2}{3} = 2z + 1$ e $s : X = (-2, 1, -1) + \lambda(-1, 6, 3)$.
   (c) $r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -5\sqrt{2} + \lambda \end{cases}$.
6. Verifique se as retas r e s são ortogonais e, em caso afirmativo, verifique se também são perpendiculares.
   (a) $r : x + 3 = y = \frac{z}{3}$, $\quad s : \frac{x-4}{2} = \frac{4-y}{-1} = -z$.
   (b) $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{7}$, $\quad s : X = (1, 3, 0) + \lambda(0, -7, 5)$.
   (c) $r : X = (0, 1, 0) + \lambda(3, 1, 4)$, $\quad s : X = (-1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1)$.
7. Obtenha uma equação vetorial da reta s que contém P e é perpendicular a r, nos casos:
   (a) $P = (2, 6, 1)$, $r : X = (-3, 0, 0) + \lambda(1, 1, 3)$.
   (b) $P = (1, 0, 1)$, r contém $A = (0, 0, -1)$ e $B = (1, 0, 0)$.
8. Obtenha equações da reta perpendicular comum às retas r e s.
   (a) $r : X = (2, 0, -1) + \lambda(1, 1, 1)$, $\quad s : x + y - 2 = z = 0$.
   (b) $r : x = y - 1 = z + 3$, $\quad s : 2x - y = y + z = 2x - z + 1$.
9. Ache a reta que passa pelo ponto (1,-2,3) e que forma ângulos de 45^o e 60^o respectivamente com o eixo Ox e Oy.
10. Calcule a distância entre as retas r e s:
    (a) $r : X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 2, 3)$ e $s : X = (0, 2, 3) + \lambda(-1, -2, -3)$.
    (b) $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 3)$ e $s : X = (1, 0, 1) + \lambda(-1, -2, -3)$.
    (c) $r : X = (3, 0, 1) + \lambda(3, 1, 3)$ e $s : X = (1, 0, 1) + \lambda(-1, -2, -3)$.

11. Verifique se $\pi_1 = \pi_2$ (e explique porque) nos seguintes casos:
    (a) $\pi_1 : X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(-1, 1, 1)$ e $\pi_2 : X = (1, 6, 2) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(2, 3, -2)$;
    (b) $\pi_1 : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0)$ e $\pi_2 : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(0, -1, 1)$;
    (c) $\pi_1 : X = (2, 1, 3) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, 0, 1)$ e $\pi_2 : X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 3, -5) + \mu(1, 1, 3)$;
    (d) $\pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 2x - 6y + 4z + 4 = 0$;
    (e) $\pi_1 : x - \frac{y}{2} + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : -2x + y - 4z + 2 = 0$.
12. Escreva uma equação vetorial e equações paramétricas para o plano π descritos abaixo:
    (a) π contém $A = (1, 2, 0)$ e á paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 3, -1)$;
    (b) π contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$;
    (c) π contém $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo a segmento de extremidades $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$;
    (d) π contém $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.
13. Obtenha equações paramétrica do plano que contém o ponto $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano $\pi : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(2, 1, 0)$.
14. Obtenha uma equação geral do plano π nos seguintes casos:
    (a) π contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$;
    (b) π contém $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$;
    (c) π contém $P = (1, -1, 1)$ e $r : X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$.
15. Verifique se o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao plano $\pi : 4x - 6y + z - 3 = 0$ quando:

    (a) $\vec{u} = (-1, -2, 3)$; (b) $\vec{u} = (3, 2, 0)$; (c) $\vec{u} = (-3, 2, 24)$.

16. Dadas equações paramétricas do plano π, obtenha uma equação geral de π nos seguintes casos:

    (a) $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$ (b) $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$ (c) $\pi : \begin{cases} x = \lambda - 3\mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 3\lambda - \mu \end{cases}$

17. Dada uma equação geral, obtenha equações paramétricas do plano π:

    (a) $4x + 2y - z + 5 = 0$; (b) $5x - y - 1 = 0$; (c) $y - z - 2 = 0$.

18. Mostre que o ponto $P = (4, 1, -1)$ não pertence à reta $r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$ e obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.
19. Obtenha uma equação vetorial para a reta r.
    (a) $r : \begin{cases} x - y - 3z + 4 = 0 \\ x + 2y - 3z - 5 = 0 \end{cases}$
    (b) $r : \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$
20. Estude a posição relativa das retas r e s.
    (a) $r : X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1)$ e $s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$
    (b) $r : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$
    (c) $r : \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z$ e $s : \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z = -2 \end{cases}$

(d) $r : \frac{x+1}{2} = y = -z$ e $s : \begin{cases} x + y - 3z + 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

21. No exercício acima, obtenha, quando for o caso, o ponto de interseção das retas r e s.
22. Nos exercícios 2 e 20 acima, obtenha, quando for o caso, uma equação geral do plano determinado pelas retas r e s.
23. Em cada item, ache o $\cos\theta$ onde θ é a medida do ângulo entre as retas r e s:

    (a) $r : (-\frac{5}{2}, 2, 0) + \lambda(\frac{1}{2}, 1, 1)$ e $s : \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$;

    (b) $r : \begin{cases} \frac{x+2}{3} = 3 - z \\ y = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} \frac{x+1}{2} = z + 3 \\ y = 0 \end{cases}$;

    (c) $r : x = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{3}$ e $s : \begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ 2x + 3y - 8z = 1 \end{cases}$.

24. Calcule m em cada caso, usando a informação dada sobre as retas

$$r : \begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} , \quad s : x = \frac{y}{m} = z \quad \text{e} \quad t : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

    (a) r e s são paralelas;
    (b) r, s e t são paralelas a um mesmo plano;
    (c) r e t são concorrentes;
    (d) s e t são coplanares;
    (e) r e s são reversas.

25. Estude a posição relativa de r e π e, quando forem transversais, obtenha o ponto de interseção P.

    (a) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$ e $\pi : x - y - z = 2$;
    (b) $r : \frac{x-1}{2} = y = z$ e $\pi : X = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$;
    (c) $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e $\pi : X = (0, \frac{1}{2}, 0) + \lambda(1, \frac{-1}{2}, 0) + \mu(0, 1, 1)$;
    (d) $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ e $\pi : x + y = 2$;
    (e) $r : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1)$ e $\pi : X = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, -1, 0)$;
    (f) $r : \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3}$ e $\pi : 3x - 6y - z = 0$.

26. Sejam $r : X = (n, 2, 0) + \lambda(2, m, n)$ e $\pi : nx - 3y + z = 1$. Obtenha condições sobre m e n para que:

    (a) r e π sejam paralelos;
    (b) r e π sejam transversais;
    (c) r esteja contida em π.

27. Ache um vetor diretor de uma reta paralela ao plano $\pi : x + y + z = 0$ e que forma um ângulo de 45^o com o plano $\pi_2 : x - y = 0$.
28. Calcule m para que r seja paralela a π onde $r : X = (1, 1, 1) + \lambda(2, m, 1)$ e $\pi : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0) + \mu(1, 0, 1)$.
29. A reta t é paralela a Oxz, está contida em $\pi : x + 2y - z = 2$, e é concorrente com a reta $s : X(2, 1, 1) + \lambda(1, 2, 0)$. Obtenha uma equação vetorial de t.
30. Nos ítens dos exercícios 2 e 20 em que r e s são reversas, obtenha uma equação geral do plano que contém r e é paralelo a s.

31. Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2:
   (a) $\pi_1 : X = (1,1,1) + \lambda(0,1,1) + \mu(-1,2,1)$ e $\pi_2 : X = (1,0,0) + \lambda(1,-1,0) + \mu(-1,-1,-2)$;
   (b) $\pi_1 : X = (4,2,4) + \lambda(1,1,2) + \mu(3,3,1)$ e $\pi_2 : X = (3,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,4)$;
   (c) $\pi_1 : 2x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y - 4z = 0$;
   (d) $\pi_1 : x - y + 2z - 2 = 0$ e $\pi_2 : X = (0,0,1) + \lambda(1,0,3) + \mu(-1,1,1)$;
32. Mostre que os planos $\pi : \begin{cases} x = -\lambda + 2\mu \\ y = m\lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$ e $\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + m\lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + m\mu \end{cases}$ são transversais, qualquer que seja o número real m.
33. Estude a posição relativa dos planos $\pi_1 : 2x+y+3z+1 = 0$ e $\pi_2 : X = (1,1,1)+\lambda(1,1,0)+\mu(2,-1,m)$.
34. Obtenha uma equação geral do plano π_1, que contém $r : X = (1,0,1) + \lambda(0,3,1)$ e é perpendicular a $\pi_2 : x + y - 2z - 2 = 0$, e obtenha uma equação vetorial de $\pi_1 \cap \pi_2$.
35. Dê uma equação vetorial da reta paralela ao plano π, perpendicular à reta AB, e que intercepta a reta s, sendo $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$, $A = (1,0,1)$, $B = (0,1,2)$, $s : X = (4,5,0) + \lambda(3,6,1)$.
36. Verifique se r e π são perpendiculares:
   (a) $r : X = (3,1,4) + \lambda(-1,0,1)$, $\quad \pi : X = (1,1,1) + \lambda(0,2,0) + \mu(1,1,1)$.
   (b) $r : X = (1,1,0) + \lambda(3,-3,1)$, $\quad \pi : 6x - 6y + 2z - 1 = 0$.
   (c) $r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ $\quad \pi : x - y + z = 1$.
   (d) $r : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\quad \pi : 2x - 2y + 4z = 1$.
37. Obtenha uma equação vetorial da reta que contém o ponto P e é perpendicular ao plano π.
   (a) $P = (1,-1,0)$, $\pi : X = (1,-1,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,1)$.
   (b) $P = (1,2,3)$, $\pi : 2x + y - z = 2$.
38. Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto P e é perpendicular à reta r.
   (a) $P = (0,1,-1)$, $r : X = (0,0,0) + \lambda(1,-1,1)$.
   (b) $P = (0,0,0)$, r contém $A = (1,-1,1)$ e $B = (-1,1,-1)$.
   (c) $P = (1,1,-1)$, $r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$
39. Obtenha o simétrico do ponto P em relação ao plano π, nos casos:
   (a) $P = (1,4,2)$, $\pi : x - y + z - 2 = 0$;
   (b) $P = (1,1,1)$, $\pi : 4y - 2z + 3 = 0$.
40. Verifique se π_1 e π_2 são perpendiculares
   (a) $\pi_1 : X = (1,-3,4) + \lambda(1,0,3) + \mu(0,1,3)$,
   $\pi_2 : X = (0,0,0) + \lambda(1,1,6) + \mu(1,-1,0)$.
   (b) $\pi_1 : X = (4,3,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(3,1,0)$, $\pi_2 : y - 3z = 0$.
   (c) $\pi_1 : x + y - z - 2 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 2z = 0$
41. Estude a posição relativa dos planos $\pi_1 : 2x+y+3z+1 = 0$ e $\pi_2 : X = (1,1,1)+\lambda(1,1,0)+\mu(2,-1,m)$ e verifique se existe algum valor de m para o qual π_1 e π_2 sejam perpendiculares.
42. Obtenha uma equação geral do plano que contém o ponto $(2,1,0)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1 : x + 2y - 3z + 4 = 0$ e $\pi_2 : 8x - 4y + 16z - 1 = 0$.
43. Obtenha uma equação geral do plano que contém a reta $r : X = (1,0,2) + \lambda(4,1,0)$ e é perpendicular a $\pi : 3x + y + z = 0$.

44. A diagonal BC de um quadrado $ABCD$ está contida na reta $r : X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$. Conhecendo $A = (1, 1, 0)$, determine os outros três vértices.

45. Ache a medida em radianos do ângulo entre a reta r e o plano π nos seguintes casos:
    (a) $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ e $\pi : z = 0$;
    (b) $r : X = (0, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0)$ e $\pi : 3x + 4y = 0$;
    (c) $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 + 2z \end{cases}$ e $\pi : \sqrt{\frac{45}{7}}x + y + 2z - 10 = 0$.

46. Ache a medida em radianos do ângulo entre os planos π_1 e π_2 nos seguintes casos:
    (a) $\pi_1 : 2x + y - z - 1 = 0$ e $\pi_2 : x - y + 3z - 10 = 0$;
    (b) $\pi_1 : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0)$ e $\pi_2 : x + y + z = 0$.

47. Ache a reta t que intercepta as retas $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = -\frac{z}{3}$ e $s : \begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ e forma ângulos congruentes com os eixos coordenados.

48. Obtenha uma equação geral do plano que contém a reta $r : \begin{cases} 3z - x = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases}$ e forma um ângulo cuja medida é de $\theta = \arccos \frac{2\sqrt{30}}{11}$ com a reta $s : X = (1, 1, 0) + \lambda(3, 1, 1)$.

49. Calcule a distância do ponto P à reta r:
    (a) $P = (0, -1, 0)$ e $r : x = 2y - 3 = 2z - 1$;
    (b) $P = (-2, 0, 1)$ e $r : X = (1, -2, 0) + \lambda(3, 2, 1)$.

50. Obtenha os pontos da intersecção dos planos $\pi_1 : x + y = 2$ e $\pi_2 : x = y + z$ que distam $\sqrt{\frac{14}{3}}$ da reta $s : x = y = z + 1$.

51. Obtenha os pontos da reta r que equidistam das retas s e t:
    (a) $r : x - 1 = 2y = z$, $s : x = y = 0$ e $t : x - 2 = z = 0$;
    (b) $r : x = y = z$, $s : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0)$ e $t : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, -1)$.

52. Obtenha uma equação vetorial da reta r que dista 1 do ponto $P = (1, 2, 1)$, é concorrente com $s : X = (-1, 1, 1) + \lambda(0, -1, 2)$ e paralela a $t : 2x - z - 1 = y = 2$.

53. Calcule a distância do ponto P ao plano π:
    (a) $P = (0, 0, -6)$ e $\pi : x - 2y - 2z - 6 = 0$;
    (b) $P = (9, 2, -2)$ e $\pi : X = (0, -5, 0) + \lambda(0, \frac{5}{12}, 1) + \mu(1, 0, 0)$.

54. Calcule a distância do ponto de intersecção de $r : X = (1, 3, 4) + \lambda(1, 2, 3)$ e $s : X = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$ ao plano determinado por $t : X = (0, 1, 0) + \lambda(0, 6, 1)$ e $h : x = y - 6z + 8 = 2x - 3$.

55. Obtenha os pontos da reta $r : x = 2 - y = y + z$ que distam $\sqrt{6}$ do plano $\pi : x - 2y - z = 1$.

56. Determine os pontos da reta $r : x - 1 = 2y = z$ que equidistam dos planos $\pi_1 : 2x - 3y - 4z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 3y - 2z + 3 = 0$.

57. Obtenha uma equação geral do plano π que contém $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1)$ e dista $\sqrt{2}$ de $P = (1, 1, -1)$.

58. Obtenha uma equação geral do plano que dista 1 de $O = (0, 0, 0)$ e contém a reta perpendicular comum às retas $r : X = (2, 1, 2) + \lambda(1, 1, 1)$ e $s : X = (-1, 0, 1) + \mu(1, 1, 2)$.

59. Calcule a distância entre as retas r e s, onde:
   (a) $r : X = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1)$ e $s : x + y + z = 2x - y - 1 = 0$;
   (b) $r : \frac{x+4}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-2}$ e $s : X = (21, -5, 2) + \lambda(6, -4, -1)$;
   (c) $r : y = 3z - 2 = 3x + 1$ e $s : 3x - 2z + 3 = 0 = y - z - 2$.
60. Determine a reta r que contém o ponto A, é paralela ao plano π e dista d da reta s, onde
   (a) $A = (1, 3, -1)$, $\pi : x + z = 2$, $s : x - z = y + 2 = z - x + 4$ e $d = 3$;
   (b) $A = (1, 2, 0)$, $\pi : x + y + z = 1$, $s : X = (0, 3, 2) + \lambda(1, 1, 0)$ e $d = 2$.
61. Dadas as retas $r : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 1, 0)$ e $s : X = (2, 0, 1) + \lambda(0, 0, 1)$ e os pontos $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (2, 1, 1)$, obtenha uma equação vetorial da reta que contém P, é concorrente com r e equidistante de Q e s.
62. Calcule a distância entre os planos π_1 e π_2:
   (a) $\pi_1 : 2x - y + 2z + 9 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 21 = 0$;
   (b) $\pi_1 : x + y + z = \frac{5}{2}$ e $\pi_2 : X = (2, 1, 2) + \lambda(-1, 0, 3) + \mu(1, 1, 0)$.
63. O plano π é determinado pelas retas $r : x + z = 5 = y + 4$ e $s : X = (4, 1, 1) + \lambda(4, 2, -3)$. Obtenha equações gerais dos planos que distam 2 de π.
64. Dentre os planos que distam 2 de $\pi : x - y + z = 0$, qual é o mais próximo de $P = (2, 1, 1)$?