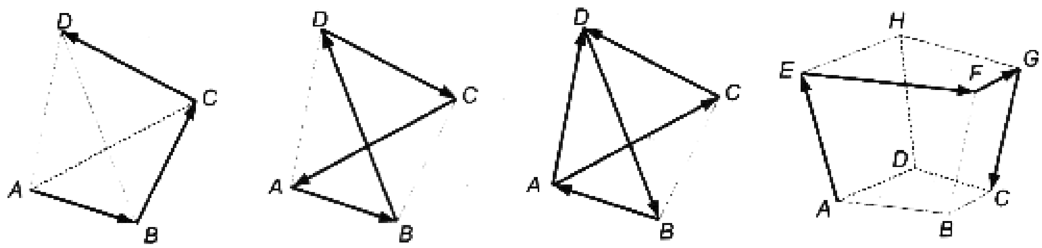
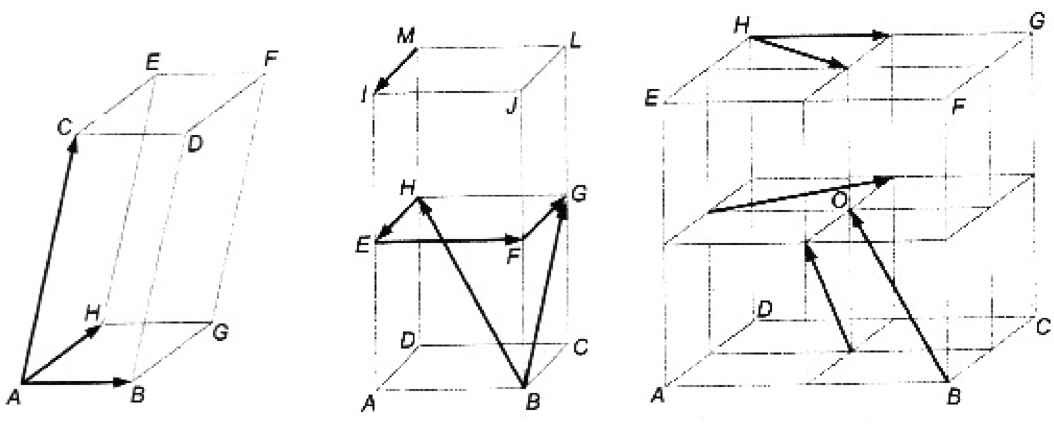
MAT 112 - VETORES E GEOMETRIA - IF/IME
1º SEMESTRE 2015

LISTA 1

1. Ache a soma dos vetores indicados na figura, nos casos:



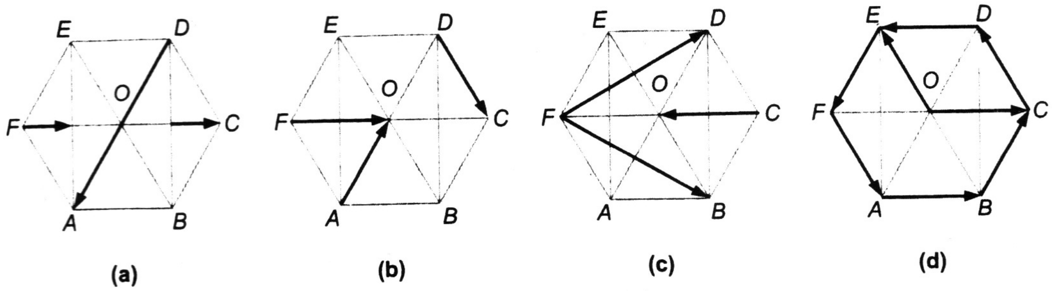
2. Ache a soma dos vetores indicados em cada caso, sabendo-se que
   (a) $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo.
   (b) $ABCDEFGH$ e $EFGHIJLM$ são cubos de arestas congruentes.
   (c) $ABCDEFGH$ é um cubo de centro O e está dividido em oito cubos congruentes por planos paralelos às faces.



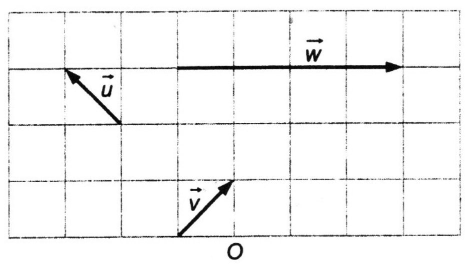
(a) (b) (c)

3. Utilize o paralelepípedo da Figura (a) acima para determinar o vetor $\overrightarrow{x}$ em cada caso:
   (a) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{HE} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$
   (b) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{HD} - \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BE}$
   (c) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$

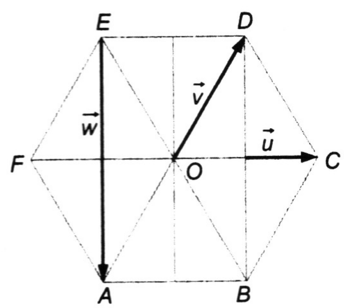
4. Na figura abaixo, os hexágonos são regulares. Em cada caso, determine a soma dos vetores indicados.



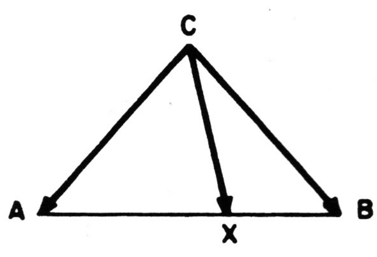
5. Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB}$?
6. Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na figura abaixo, represente $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + \frac{5}{4}\vec{w}$ por uma flecha de origem O.



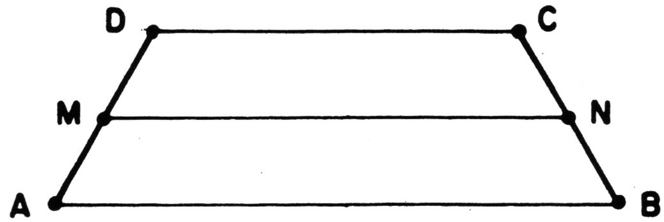
7. Na figura abaixo, $ABCDEF$ é um hexágono regular. Determine X, sabendo que $\overrightarrow{CX} = -3\vec{u} + 2\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{w}$.



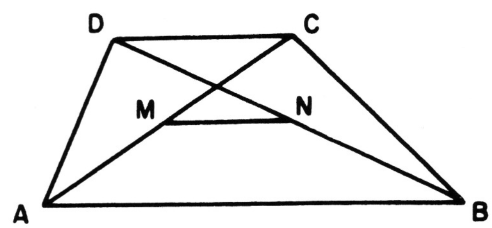
8. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ e m. (*Sugestão:* na relação $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, faça aparecer C em ambos os membros.)



9. É dado um triângulo ABC e os pontos X, Y, Z, tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC}$ e $\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$ e $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, m, n e p.
10. Num triângulo ABC é dado X sobre o lado AB tal que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\|\overrightarrow{XB}\|$ e é dado Y sobre o lado BC tal que $\|\overrightarrow{BY}\| = 3\|\overrightarrow{YC}\|$. Mostre que as retas CX e AY se cortam. (*Sugestão:* use o exercício anterior, achando qual dever ser m e qual deve ser n. Suponha $\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY}$ e chegue a um absurdo.)
11. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (*Atenção:* não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)

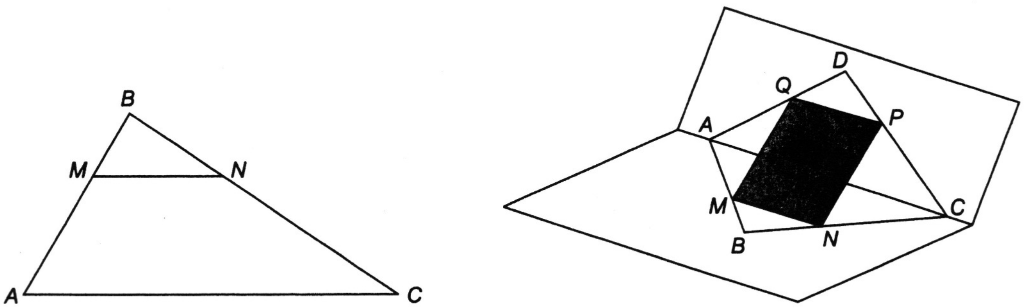


12. Demonstre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases. (*Atenção:* não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



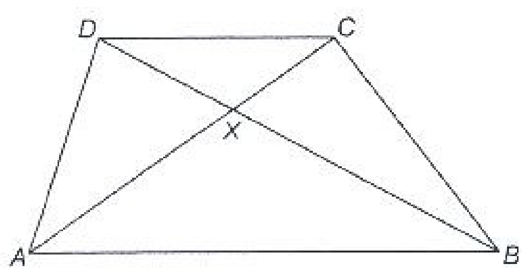
13. Num triângulo ABC, sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Mostre que
$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}.$$
14. Dado um triângulo qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.
15. Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O, prove que
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}.$$
16. Seja $OABC$ um tetraedro e seja X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.
17. Seja $OABC$ um tetraedro, X o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC (baricentro). Exprima $\overrightarrow{OX}$ en termos de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.
18. Sejam A, B, C e D pontos quaisquer, M o ponto médio de AC e N o de BD. Exprima $\vec{x}$ em função de $\overrightarrow{MN}$, sendo $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.
19. (a) No triângulo ABC da figura (a), M divide o segmento AB e N divide o segmento CB na mesma razão r. Prove que $MN \parallel AC$ e calcule $\frac{\|\overrightarrow{MN}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$.
    (b) No quadrilátero $ABCD$ (eventualmente reverso, como na figura (b)), M divide o segmento AB, N divide BC, P divide CD e Q divide AD, todos na mesma razão r. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

(c) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ do item anterior seja um paralelogramo. Mostre que as quatro diagonais (as duas de $ABCD$ e as duas de $MNPQ$) têm um ponto em comum.



(a) (b)

20. Sejam A, B e C pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que:
    (a) X pertence à reta AB se e somente se existem escalares α e β tais que $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ e $\alpha + \beta = 1$.
    (b) X pertence ao segmento AB se e somente se existem escalares α e β tais que $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$.
    (c) X é **interior ao segmento** AB (isto é, existe um escalar λ tal que $0 < \lambda < 1$ e $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$) se e somente se $\overrightarrow{XA}$ e $\overrightarrow{XB}$ são de sentido contrário.
21. Prove que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é l.i., então:
    (a) $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ é l.i.;
    (b) $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ é l.i.
22. Prove que $\{\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}\}$ é l.d. para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
23. Determine os escalares a e b sabendo que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.i. e que $(a-1)\vec{u} + b\vec{v} = b\vec{u} - (a+b)\vec{v}$.
24. No trapézio $ABCD$ da figura abaixo, o comprimento de AB é o dobro do comprimento de CD. Exprima $\vec{AX}$ com combinação linear de $\vec{AD}$ e $\vec{AB}$.

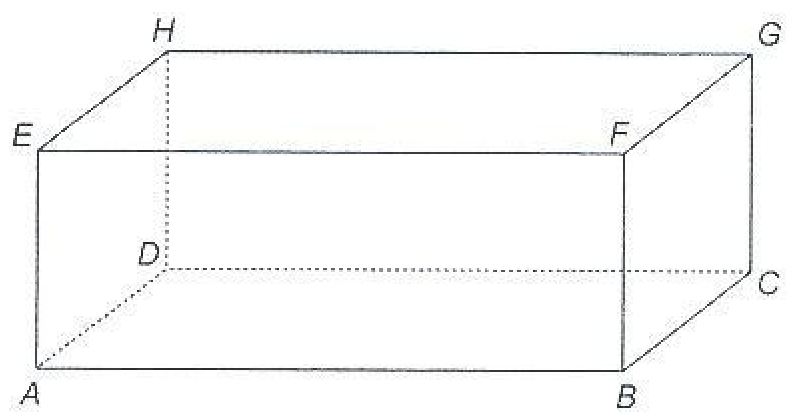


Nos exercícios 25 a 30 abaixo, as coordenadas dos vetores são dadas em relação a uma base qualquer fixada.

25. Suponha $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$.
    (a) Ache as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - 2\vec{v}$ e $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$.
    (b) Verifique se $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
    (c) Escreva $\vec{t} = (4, 0, 13)$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
26. $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$?
27. Decida se é l.d. ou se é l.i.:
    (a) $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$;
    (b) $\vec{u} = (0, 1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 3, 1)$;

(c) $\vec{u} = (1, -3, 14)$ e $\vec{v} = (\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1)$;
(d) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (200, 2, 1)$ e $\vec{w} = (300, 2, 1)$;
(e) $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, -7)$ e $\vec{w} = (4, 5, -4)$;
(f) $\vec{u} = (0, 0, 0)$;
(g) $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

28. Ache $m \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{u} = (1, 2, 2)$ seja combinação linear de $\vec{v} = (m-1, 1, m-2)$ e $\vec{w} = (m+1, m-1, 2)$. Em seguida, determine m para que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja l.d.
29. Determine m e n tais que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seja l.d., sendo que $\vec{u} = (1, m, n+1)$ e $\vec{v} = (m, n, 10)$.
30. Ache m para que sejam l.d.:
    (a) $\vec{u} = (m, 1, m)$ e $\vec{v} = (1, m, 1)$;
    (b) $\vec{u} = (1 - m^2, 1 - m, 0)$ e $\vec{v} = (m, m, m)$;
    (c) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (1, 2, m)$ e $\vec{w} = (1, 1, 1)$;
    (d) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (0, 1, m)$ e $\vec{w} = (0, m, 2m)$.
31. Sejam $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base e $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ e $\vec{f_3} = \vec{e_3}$. Decida se $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base.
32. Se $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é uma base, prove que $(\alpha_1\vec{e_1}, \alpha_2\vec{e_2}, \alpha_3\vec{e_3})$ é uma base se, e somente se, α_1, α_2 e α_3 não são nulos. Interprete geometricamente.
33. Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio de BC.
    (a) Explique por que $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ é uma base.
    (b) Determine as coordenadas de $\vec{AM}$ nesta base.
34. No paralelepípedo retângulo da figura abaixo, HG, BC e CG medem, respectivamente, 3, 1 e 2.
    (a) Explique por que $(\vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$ é uma base e verifique se é ortonormal.
    (b) Explique por que, em relação à base do item (a), $\vec{AG} = (1, 1, 1)$.
    (c) Mostre que o comprimento da diagonal AG é $d = \sqrt{14}$.
    (d) Note que se simplesmente aplicarmos a fórmula para calcular a norma de um vetor dada em aula, obteríamos que o comprimento de $\vec{AG}$ é $\sqrt{3}$. Por que o valor dá diferente do obtido no item (c)?



35. Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base ortonormal. Calcule $\|\vec{u}\|$ nos seguintes casos:
    (a) $\vec{u} = (1, 1, 1)_E$;
    (b) $\vec{u} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$;
    (c) $\vec{u} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$;
    (d) $\vec{u} = -4\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$.
36. Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária, calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$.

37. São dadas as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em relação a uma base ortonormal fixada. Calcule, em radianos, a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
   (a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$.
   (b) $\vec{u} = (3, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$.
   (c) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
38. Determine x de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais.
   (a) $\vec{u} = (x, x, 4)$, $\vec{v} = (4, x, 1)$.
   (b) $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$, $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$.
   (c) $\vec{u} = (x, -1, 4)$, $\vec{v} = (x, -3, 1)$.
39. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e a $\vec{v} = (2, -4, 6)$. Quais desses vetores forma ângulo agudo com $(1, 0, 0)$?
40. Obtenha um vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e a $\vec{w} = (1, -2, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.
41. Dados $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, -1)$ e $\vec{t} = (2, 1, -1)$, obtenha $\vec{u}$ de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $\vec{t}$, tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja l.d. Algum dos vetores encontrados forma ângulo agudo com $(-1, 0, 0)$?
42. Sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $||\vec{u}|| = \frac{3}{2}$, $||\vec{v}|| = \frac{1}{2}$ e $||\vec{w}|| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.
43. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de norma 1 tais que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2}$. Verifique se $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
44. (a) Mostre que $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
   (b) Calcule $||2\vec{u} + 4\vec{v}||^2$, sabendo que $\vec{u}$ é unitário, $||\vec{v}|| = 2$ e a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{2\pi}{3}$ radianos.
45. Prove que:
   (a) $4\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2$;
   (b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow ||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u} - \vec{v}||$;
   (c) as diagonais de um paralelogramo têm comprimentos iguais se, e somente se, o paralelogramo é um retângulo.
46. Prove que as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares se, e somente se, o paralelogramo é um losango.
47. A medida angular em radianos entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{4}$, $||\vec{u}|| = \sqrt{5}$ e $||\vec{v}|| = 1$. Calcule a medida angular em radianos entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.
48. Prove que:
   (a) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 2(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2)$;
   (b) a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados;
   (c) a diagonal maior de um paralelogramo é maior do que cada um dos quatro lados.
49. Prove que as diagonais de um losango estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.