

MAT 330 - TEORIA DOS CONJUNTOS
1º SEMESTRE 2014
BACHARELADO - IME

LISTA FINAL - PARA ENTREGA ATÉ 15/12/2014

1. Seja (P, \leq) uma ordem parcial. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
 - (a) Para qualquer $X \subseteq P$ tal que para todo $p \in P$, se $\{q \in P : q < p\} \subseteq X$, então $p \in X$, tem-se que $X = P$.
 - (b) Todo $Y \subseteq P$ não-vazio possui elemento minimal.
 - (c) Não existe $(p_n)_{n \in \omega} \subseteq P$ tal que $p_n < p_{n+1}$ para todo $n \in \omega$.
2. Mostre que se α é um ordinal limite, então $\alpha = \sup \alpha$.
3. Mostre que o primeiro ordinal não-enumerável ω_1 é o conjunto de todos os ordinais enumeráveis.
4. Mostre que existem famílias $\mathcal{T} \subseteq \wp(\mathbb{N})$ de conjuntos infinitos com as seguintes propriedades:
 - (a) se $A, B \in \mathcal{T}$, então $A \subseteq^* B$ ou $B \subseteq^* A$;
 - (b) não existe $C \in \wp(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{T}$ infinito tal que $C \subseteq^* A$ para todo $A \in \mathcal{T}$.
5. Fixado um número natural $n \geq 2$, uma família \mathcal{F} de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} é dita n -linked se para quaisquer $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{F}$, $X_1 \cap \dots \cap X_n$ é infinito. Mostre que toda família n -linked está contida em uma família n -linked maximal.
6. Seja ω_1 o menor cardinal não-enumerável e para cada $n \in \omega$, $n \geq 1$, seja ω_{n+1} o menor cardinal maior que ω_n . Mostre que $\bigcup_{n \in \omega} \omega_n$ é um cardinal.
7. Um número real x é dito transcendente se ele não é raiz de nenhum polinômio não-nulo com coeficientes racionais. Prove que o conjunto dos números reais que são transcendentos tem cardinalidade 2^ω .
8. Seja \mathfrak{a} o menor cardinal infinito κ tal que existe uma família \mathcal{F} de cardinalidade κ e tal que \mathcal{F} seja quase-disjunta maximal. Mostre que $\omega_1 \leq \mathfrak{a} \leq 2^\omega$.
9. Mostre que existe $X \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $|X \cap C| = 3$ para qualquer circunferência $C \subseteq \mathbb{R}^2$.