

MAT 330 - TEORIA DOS CONJUNTOS
1º SEMESTRE 2014
BACHARELADO - IME

LISTA 6

1. Mostre que se existe uma função de B sobre A , então $2^{|A|} \leq 2^{|B|}$. [Dica: Dada $g : B \rightarrow A$ sobrejetora, considere $f(X) = g^{-1}[X]$, para todo $X \subseteq A$.]
2. Seja X um conjunto e f uma função injetora de X em X tal que $f[X] \subsetneq X$. Prove que X é infinito.
3. Mostre que o conjunto de todos os subconjuntos finitos de \mathbb{R} tem cardinalidade 2^{\aleph_0} .
4. Mostre que ω é o conjunto de todos os ordinais finitos.
5. Mostre que o primeiro ordinal não enumerável é o conjunto de todos os ordinais enumeráveis.
6. Mostre, usando o Axioma da Escolha, que a cardinalidade do conjunto de todos os subconjuntos enumeráveis de \mathbb{R} tem cardinalidade 2^{\aleph_0} e verifique onde foi usado o Axioma da Escolha na demonstração.
7. Uma família $\mathcal{F} \subseteq \wp(\mathbb{N})$ de conjuntos infinitos é dita quase-disjunta se $A \cap B$ é finito para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}$ distintos. Mostre que se \mathcal{F}_1 é quase disjunta, então existe \mathcal{F}_2 quase disjunta maximal, ou seja, tal que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ e para qualquer $C \in \wp(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}_2$ infinito, existe $A \in \mathcal{F}_2$ tal que $A \cap C$ é infinito.
8. Mostre que existem famílias $\mathcal{T} \subseteq \wp(\mathbb{N})$ de conjuntos infinitos com as seguintes propriedades:
 - (a) se $A, B \in \mathcal{T}$, então $A \subseteq^* B$ ou $B \subseteq^* A$;
 - (b) não existe $C \in \wp(\mathbb{N})$ infinito tal que $C \subseteq^* A$ para todo $A \in \mathcal{T}$.