MAT 330 - TEORIA DOS CONJUNTOS
1º SEMESTRE 2014
BACHARELADO - IME

LISTA 5

1. Use o argumento diagonal para mostrar que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é não enumerável. [Dica: Considere $\langle a_n | n \in \mathbb{N}\rangle$, onde $a_n = \langle a_{nk} | k \in \mathbb{N}\rangle$. Defina $d \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ por $d_n = a_{nn} + 1$.]
2. Mostre que $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}|$. [Dica: $2^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \wp(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.]
3. Mostre que $|A| = |B|$ implica $|\wp(A)| = |\wp(B)|$.
4. Dê um exemplo de um conjunto linearmente ordenado $(L, <)$ e um segmento inicial S de L que não é da forma $\{x | x < a\}$, qualquer que seja $a \in L$.
5. Mostre que $\omega + 1$ não é isomorfo a ω (com a boa ordem $\in$).
6. Mostre que existem $|2^{\mathbb{N}}|$ boas ordens no conjunto dos números naturais.
7. Mostre que, para todo subconjunto infinito A de $\mathbb{N}$, $(A, <)$ é isomorfo a $(\mathbb{N}, <)$.
8. Seja $(W, <)$ um conjunto bem ordenado e seja $a \notin W$. Estenda $<$ para $W' = W \cup \{a\}$, pondo a maior que todo $x \in W$. Mostre que W tem tipo de ordem menor que W'.
9. Se A e B são conjuntos ordenados, a ordem lexicográfica em $A \times B$ é dada por $(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2)$ se, e somente se, $a_1 <_A a_2$ ou $a_1 = a_2$ e $b_1 \leq_B b_2$.
   Prove que os conjuntos $W = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ e $W' = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$, ordenados lexicograficamente, são conjuntos bem ordenados não isomorfos.
10. Mostre que um conjunto X é transitivo se, e somente se, $X \subseteq \wp(X)$.
11. Mostre que um conjunto X é transitivo se, e somente se, $\bigcup X \subseteq X$.
12. Decida se os seguintes conjuntos são transitivos e justifique sua resposta.
    (a) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$,
    (b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
    (c) $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.
13. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
    (a) Se X e Y são transitivos, então $X \cup Y$ é transitivo.
    (b) Se X e Y são transitivos, então $X \cap Y$ é transitivo.
    (c) Se $X \in Y$ e Y é transitivo, então X é transitivo.
    (d) Se $X \subseteq Y$ e Y é transitivo, então X é transitivo.
    (e) Se $S \subseteq \wp(Y)$ e Y é transitivo, então $Y \cup S$ é transitivo.

14. Prove que se todo $X \in S$ é transitivo, então $\bigcup S$ é transitivo.
15. Prove que um ordinal α é um número natural se, e somente se, todo subconjunto não vazio de α tem máximo.
16. Mostre que se um conjunto de ordinais X não tem um máximo, então $\sup X$ é um ordinal limite.
17. Mostre que se X é um conjunto não vazio de ordinais, então $\bigcap X$ é um ordinal. Mais ainda, $\bigcap X$ é o menor elemento de X.
18. Use o axioma da substituição para mostrar o seguinte: seja $\mathbf{P}(x, y)$ uma propriedade tal que para todo x existe no máximo um y tal que $\mathbf{P}(x, y)$ vale. Então, para todo conjunto A, existe um conjunto B tal que, pata todo $x \in A$, se $\mathbf{P}(x, y)$ vale para algum y, então $\mathbf{P}(x, y)$ vale para algum $y \in B$.
19. Defina $V_0 = \emptyset$, $V_{n+1} = \wp(V_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $V_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Prove:
    (a) Todo $x \in V_\omega$ é finito.
    (b) V_ω é transitivo.
    (c) V_ω é um conjunto indutivo.
    (d) Se $x, y \in V_\omega$, então $\{x, y\} \in V_\omega$.
    (e) Se $X \in V_\omega$, então $\bigcap X \in V_\omega$ e $\wp(X) \in V_\omega$.
    (f) Se $A \in V_\omega$ e f é uma função em A tal que $f(x) \in V_\omega$, para todo $x \in A$, então $f[A] \in V_\omega$.
    (g) Se X é um subconjunto finito de V_ω, então $X \in V_\omega$.

    Os elementos de V_ω são chamados de *conjuntos hereditariamente finitos*.
20. Prove que se um conjunto A pode ser linearmente ordenado, então toda família de subconjuntos finitos de A admite uma função escolha. (Não segue dos axiomas de ZF que todo conjunto pode ser linearmente ordenado.)
21. Mostre que se A pode ser bem ordenado, então $\wp(A)$ pode ser linearmente ordenado. [Dica: Seja $<$ uma boa ordem em A; para $X, Y \subseteq A$ defina $X \prec Y$ se, e somente se, o $<$-menor elemento de $X \triangle Y$ pertence a X.]
22. * Seja $(A, \leqslant)$ um conjunto ordenado no qual toda cadeia tem uma cota superior. Mostre que para todo $a \in A$ existe um elemento $\leqslant$-maximal x de A tal que $a \leqslant x$.
23. Prove que o Lema de Zorn é equivalente à seguinte afirmação: para todo conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$, o conjunto de todas as cadeias de $(A, \leq)$ tem um elemento $\subseteq$-maximal.
24. Prove que o Lema de Zorn é equivalente à seguinte afirmação: se A é uma família de conjuntos tal que, para cada $B \subseteq A$ linearmente ordenado por $\subseteq$, $\bigcup B \in A$, então A tem um elemento $\subseteq$-maximal.

25. Uma família de conjuntos A tem *caráter finito* se $X \in A$ se, e somente se, todo subconjunto finito de X pertence a A. Prove que o Lema de Zorn é equivalente à seguinte afirmação (Lema de Tuckey): toda família de conjuntos de caráter finito tem um elemento $\subseteq$-maximal. [Dica: use o exercício 24.]
26. * Seja E uma relação binária num conjunto A. Mostre que existe uma função $f : A \to A$ tal que para todo $x \in A$, $(x, f(x)) \in E$ se, e somente se, existe algum y tal que $(x, y) \in E$.
27. * Prove que todo conjunto não enumerável tem um subconjunto de cardinalidade $\aleph_1$.
28. * Mostre que todo conjunto infinito é equipotente a algum dos seus subconjuntos próprios.
29. * Seja $(A, <)$ um conjunto linearmente ordenado. Uma sequência $\langle a_n | n \in \omega \rangle$ de elementos de A é *decrescente* se $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \in \omega$. Prove que $(A, <)$ é uma boa ordem se, e somente se, não existem sequências decrescentes infinitas em A.
30. * Prove as seguintes leis distributivas (veja o exercício 26 da lista 2).

$$\bigcap_{t \in T} (\bigcup_{s \in S} A_{t,s}) = \bigcup_{f \in S^T} (\bigcap_{t \in T} A_{t,f(t)})$$

$$\bigcup_{t \in T} (\bigcap_{s \in S} A_{t,s}) = \bigcap_{f \in S^T} (\bigcup_{t \in T} A_{t,f(t)})$$

31. * Prove que para toda ordem parcial $\preccurlyeq$ num conjunto A, existe uma ordem linear $\leqslant$ em A tal que $a \preccurlyeq b$ implica $a \leqslant b$, para quaisquer $a, b \in A$ (i.e., toda ordem parcial pode ser estendida a uma ordem linear).
32. * (Princípio das Escolhas Dependentes) Se R é uma relação binária em $M \neq \emptyset$ tal que para cada $x \in M$ existe $y \in M$ para o qual $x \, R \, y$, então existe uma sequência $\langle x_n | n \in \omega \rangle$ tal que $x_n \, R \, X_{n+1}$ vale para todo $n \in \omega$.
33. Assumindo apenas o Princípio das Escolhas Dependentes, prove que todo sistema enumerável de conjuntos admite uma função escolha (o Axioma da Escolha Enumerável).
34. Prove que se todo conjunto é equipotente a um ordinal, então o Axioma da Escolha vale.
35. Prove que se para quaisquer conjuntos A e B, $|A| \leqslant |B|$ ou $|B| \leqslant |A|$, então o axioma da escolha vale. [Dica: Compare A e $B = h(A)$.]
36. * Prove que se B é um conjunto infinito e A é um subconjunto de B tal que $|A| < |B|$, então $|B \setminus A| = |B|$.