MAT 330 - TEORIA DOS CONJUNTOS
1º SEMESTRE 2014
BACHARELADO - IME

LISTA 4

1. Prove:
   (a) Se $|A| < |B|$ e $|B| < |C|$, então $|A| < |C|$.
   (b) Se $|A| \leqslant |B|$ e $|B| < |C|$, então $|A| < |C|$.
2. Se $A \subseteq B$ então $|A| \leqslant |B|$.
3. Prove:
   (a) $|A \times B| = |B \times A|$.
   (b) $|(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)|$.
   (c) $|A| \leqslant |A \times B|$, se $B \neq \emptyset$.
4. Mostre que $|S| \leqslant |\wp(S)|$. [Dica: $|S| = |\{\{a\} : a \in S\}|$.]
5. Mostre que $|A| \leqslant |A^S|$ para todo A e para qualquer $S \neq \emptyset$. [Dica: Considere funções constantes.]
6. Se $S \subseteq T$, então $|A^S| \leqslant |A^T|$; em particular, $|A^n| \leqslant |A^m|$ se $n \leqslant m$. [Dica: Considere as funções que assumem um valor constante fixo em $T \setminus S$.]
7. $|T| \leqslant |S^T|$ se $|S| \geqslant 2$. [Dica: Tome $u, v \in S$, $u \neq v$, e, para cada $t \in T$, considere $f_t : T \to S$ tal que $f_t(t) = u$ e $f_t(x) = v$, para $x \neq t$.]
8. Se $|A| \leqslant |B|$ e $A \neq \emptyset$, então existe uma função $f : B \to A$ sobrejetora.
9. Suponha que $|A_1| = |A_2|$ e $|B_1| = |B_2|$. Prove:
   (a) Se $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ e $A_2 \cap B_2 = \emptyset$, então $|A_1 \cup B_1| = |A_2 \cup B_2|$.
   (b) $|A_1 \times B_1| = |A_2 \times B_2|$.
   (c) $|\mathrm{Seq}(\mathrm{A}_1)| = |\mathrm{Seq}(\mathrm{A}_2)|$.
10. Se $S = \{X_0, \ldots, X_n\}$ e os elementos de S são dois a dois disjuntos, então $|\bigcup S| = \sum_{i=0}^{n} |X_i|$.
11. Se X e Y são finitos, então $X \times Y$ é finito e $|X \times Y| = |X|.|Y|$.
12. Se $|X|$ é finito, então $|\wp(X)| = 2^{|X|}$.
13. Se X e Y são finitos então X^Y tem $|X|^{|Y|}$ elementos.
14. Se $|X| = n \geqslant k = |Y|$ então o número de funções injetoras $f : Y \to X$ é $n.(n-1).\ldots.(n-k+1)$.

15. X é finito se, e somente se, toda família de subconjuntos de X tem um elemento $\subseteq$-maximal. [Dica: Se X é finito, $|X| = n$, para algum n. Se $U \subseteq \wp(X)$, seja m o maior número em $\{|Y| : Y \in U\}$. Se $Y \in U$ e $|Y| = m$, então Y é maximal. Por outro lado, se X é infinito, considere $U = \{Y \subseteq X | Y \text{ é finito}\}$.]
16. Use os exercícios 11 e 13 para obter provas fáceis da comutatividade e associatividade da adição e da multiplicação de números naturais, distributividade da multiplicação sobre a adição e as propriedades aritméticas usuais da exponenciação. [Dica: Para provar, por exemplo, a comutatividade da multiplicação, tome X e Y tais que $|X| = m$ e $|Y| = n$. pelo exercício11, $m \cdot n = |X \times Y|$ e $n \cdot m = |Y \times X|$. Mas $X \times Y$ e $Y \times X$ são equipotentes.]
17. Seja $F : \wp(A) \to \wp(A)$ uma função monótona, ou seja, se $X \subseteq Y \subseteq A$, então $F(X) \subseteq F(Y)$.
    (a) Mostre que X tem um ponto fixo, ou seja, existe $X \subseteq A$ tal que $F(X) = X$. [Dica: considere $T = \{X \subseteq A | F(X) \subseteq X\}$ e observe que $T \neq \emptyset$. Considere $\bar{X} = \bigcap T$, note que $\bar{X} \in T$ e $F(\bar{X}) \in T$ e conclua que $F(\bar{X}) = \bar{X}$.]
    (b) Prove o Teorema de Cantor-Bernstein usando o item (a): dados $C \subseteq B \subseteq A$ e $f : A \to C$ bijetora, considere $F : \wp(A) \to \wp(A)$ dada por $F(X) = (A \setminus B) \cup f[X]$. Mostre que F é monótona e use a existência de um ponto fixo de F para definir uma função bijetora de A sobre B.
    (c) Mostre que se Y é outro ponto fixo de F, então $\bar{X} \subseteq Y$.
    (d) Prove que F é contínua, ou seja, se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \wp(A)$ é tal que $X_n \subseteq X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $F(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(X_n)$.
    (e) Prove que se $X_0 = \emptyset \in \wp(A)$ e $X_{n+1} = F(X_n)$, então $\bar{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
18. Se A e B são finitos e $X \subseteq A \times B$, então $X = \sum_{a\in A} k_a$, onde $k_a = |X \cap (\{a\} \times B)|$.
19. Prove o teorema de Ramsey para trios a partir do teorema de Ramsey para pares.
20. Prove que dados um conjunto infinito X de pontos do plano $\mathbb{R}^2$ e $n \geq 3$, existem $P_1, \ldots, P_n \in X$ que são vértices de um n-ágono convexo.
21. Prove diretamente que $R(2, 2, 3) = 6$.
22. Prove que em qualquer grupo de seis pessoas existem três delas tais que ou todas se conhecem ou todas são estranhas entre si.
23. Prove que **não** vale a seguinte generalização do teorema de Ramsey: se $c : [\mathbb{N}]^{<\infty} \to m$, então existe $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito e $k \in m$ tal que se $c|_{[X]^{<\infty}} = k$.
24. Prove o Teorema de Schur: se $\mathbb{N} = C_1 \cup \cdots \cup C_m$, então para todo $n \geq 2$, existem $1 \leq k \leq m$ e $0 < a_1 < \cdots < a_n$, $a_i \in C_k$ tais que $a_1 + \cdots + a_n \in C_k$.