MAT 330 - TEORIA DOS CONJUNTOS
1º SEMESTRE 2014
BACHARELADO - IME

LISTA 3

1. (a) Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tal que $X_{n+1} \subseteq X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que existe $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $X \subseteq^* X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Prove que dados $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e X como em (a), se $X_n \setminus X_{n+1}$ é infinito para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe Y como em (a) tal que $X \subseteq Y$ e $Y \setminus X$ é infinito.
   (c) Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ com a *pif* (propriedade da intersecção finita), ou seja, a intersecção de finitos elementos de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é infinita. Prove que existe $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $X \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. [Dica: considere $X_n = A_0 \cap \ldots A_n$.]
2. Prove que $\leq$ é uma boa ordem num conjunto A, então $\leq$ é uma ordem total em A.
3. Prove:
   (a) Se $\preceq$ é uma ordem parcial em um conjunto A, então a relação
   $$\prec = \preceq \setminus \{(x,x) | x \in A\}$$
   é uma ordem estrita.
   (b) Se $\prec$ é uma ordem estrita em um conjunto A, então a relação
   $$\preceq = \prec \cup \{(x,x) | x \in A\}$$
   é uma ordem parcial.
4. Mostre que $x \subseteq S(x)$ e não existe z tal que $x \subsetneq z \subsetneq S(x)$.
5. Seja $n \in \mathbb{N}$. Prove que não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < k < S(n)$.
6. Use o exercício anterior para provar que, para todos $m, n \in \mathbb{N}$, se $m < n$, então $m + 1 \leqslant n$. Conclua que $m < n$ implica $m + 1 < n + 1$ e que portanto o sucessor $S(n) = n + 1$ define uma função injetora em $\mathbb{N}$.
7. Prove que existe uma função bijetora de $\mathbb{N}$ em um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$.
8. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, existe um único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = k + 1$.
9. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0, 1$, existe um único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = (k + 1) + 1$.

10. Prove que cada número natural é o conjunto de todos os números naturais menores, i.e.,

$$n = \{m \in \mathbb{N} | m < n\}.$$

    [Dica: Use indução para provar que todos os elementos de um número natural são números naturais.]
11. Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$

$$m < n \text{ se, e somente se, } m \subsetneq n.$$

12. Prove que não existe função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) > f(n+1)$. (Não existem sequências decrescentes infinitas de números naturais.)
13. Prove que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ limitado superiormente tem máximo.
14. Se $X \subseteq \mathbb{N}$, então $\langle X, < \cap X^2 \rangle$ é bem ordenado.
15. Seja $P(x)$ uma propriedade. Assuma que $k \in \mathbb{N}$ e
    (a) $P(k)$ vale.
    (b) Para todo $n \geqslant k$, se $P(n)$ então $P(n+1)$
    Então $P(n)$ vale para todo $n \geqslant k$.
16. (Princípio de Indução Finita) Seja $P(x)$ uma propriedade. Assuma que $k \in \mathbb{N}$ e
    (a) $P(0)$.
    (b) Para todo $n < k$, $P(n)$ implica $P(n+1)$
    Então $P(n)$ vale para todo $n \leqslant k$.
17. (Indução Dupla) Seja $P(x, y)$ uma propriedade. Assuma
    (**) Se $P(k, l)$ vale para quaisquer $k, l \in \mathbb{N}$ tais que $k < m$ ou ($k = m$ e $l < n$), então $P(m, n)$ vale.
    Conclua que $P(m, n)$ vale para todos $m, n \in \mathbb{N}$.