MAT 330 - TEORIA DOS CONJUNTOS
1º SEMESTRE 2014
BACHARELADO - IME

LISTA 2

1. Prove que $(a,b) \in \wp(\wp(\{a,b,\}))$ e $a,b \in \bigcup(a,b)$. Mais geralmente, se $a \in A$ e $b \in A$, então $(a,b) \in \wp(\wp(A))$.
2. Prove que (a,b), (a,b,c) e (a,b,c,d) existem, para quaisquer a, b, c e d.
3. Prove que se $(a,b) = (b,a)$ então $a = b$.
4. Prove que $(a,b,c) = (a',b',c')$ implica $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. Enuncie e prove uma propriedade análoga para quádruplas.
5. Encontre a, b e c tais que $((a,b),c) \neq (a,(b,c))$. Claramente poderíamos usar o segundo conjunto para definir triplas ordenadas com igual sucesso.
6. Seja R uma relação binária e seja $A = \bigcup(\bigcup R)$. Prove que $(x,y) \in R$ implica $x \in A$ e $y \in A$. Conclua que domR e imR existem.
7. (a) Mostre que R^{-1} e $S \circ R$ existem. [Dica: $R^{-1} \subseteq (\text{imR} \times (\text{domR})$, $S \circ R \subseteq (\text{domR} \times (\text{imS})$.]
   (b) Mostre que $A \times B \times C$ existe.
8. Sejam R uma relação binária e A e B conjuntos. Prove:
   (a) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.
   (b) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.
   (c) $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$.
   (d) Mostre com um exemplo que $\subseteq$ e $\supseteq$ nas partes (b) e (c) não podem ser substituídos por $=$.
   (e) Prove os itens (a)–(d) com R^{-1} ao invés de R.
   (f) $R^{-1}[R[A]] \supseteq A \cap \text{domR}$ e $R[R^{-1}[B]] \supseteq B \cap \text{imR}$; dê exemplos onde a igualdade não vale.
9. Seja $R \subseteq X \times Y$. Prove:
   (a) $R[X] = \text{imR}$ e $R^{-1}[Y] = \text{domR}$.
   (b) Se $a \notin \text{domR}$, $R[\{a\}] = \emptyset$; se $b \notin \text{imR}$, $R^{-1}[\{b\}] = \emptyset$.
   (c) $\text{domR} = \text{imR}^{-1}$; $\text{domR} = \text{domR}^{-1}$.
   (d) $(R^{-1})^{-1} = R$.
   (e) $R^{-1} \circ R \supseteq \text{Id}_{\text{domR}^{-1}}; \text{R} \circ \text{R}^{-1} \supseteq \text{Id}_{\text{imR}}$.

10. Sejam $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $Y = \mathcal{P}(X)$. Descreva:
    (a) $\in_Y$
    (b) $\mathrm{Id_y}$
    Determine o domínio, imagem e corpo de ambas relações.
11. Prove que, para quaisquer três relações binárias R, S e T
$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$
    .
    (A operação $\circ$ é associativa.)
12. Dê exemplos de conjuntos X, Y e Z tais que
    (a) $X \times Y \neq Y \times X$.
    (b) $X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z$.
    (c) $X^3 \neq X \times X^2$ [i.e., $(X \times X) \times X \neq X \times (X \times X)$].
    [Dica para o item (c): $X = \{a\}$.]
13. Prove:
    (a) $A \times B = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.
    (b) $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B); A \times (B_1 \times B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$.
    (c) O mesmo que o item (b), substituindo $\cup$ por $\cap$, $-$ e $\triangle$.
14. Prove: se $\mathrm{imf} \subseteq \mathrm{domg}$, então $\mathrm{dom(g \circ f) = domf}$.
15. Considere as funções f_i, $i = 1, 2, 3$ definidas por:
$$f_1 = \langle 2x - 1 | x \text{ é real } \rangle,$$
$$f_2 = \langle \sqrt{x} | x > 0 \rangle,$$
$$f_3 = \langle 1/x | x \text{ é real}, x \neq 0 \rangle.$$
    Descreva cada uma das seguintes funções e determine seus domínios e imagens: $f_2 \circ f_1$, $f_1 \circ f_2$, $f_3 \circ f_1$, $f_1 \circ f_3$.
16. Prove que as funções f_1, f_2, f_3 do exercício anterior são injetoras e encontre suas funções inversas. Em cada caso, verifique que $\mathrm{domf_i = im(f_i^{-1})}$, $\mathrm{imf_i = dom(f_i^{-1})}$.
17. Prove:
    (a) Se f é inversível, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id_{domf}}$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id_{imf}}$.
    (b) Seja f uma função. Se existe uma função g tal que $g \circ f = \mathrm{Id_{domf}}$ então f é inversível e $f^{-1} = g \restriction \mathrm{imf}$. Se existe uma função h tal que $f \circ h = \mathrm{Id_{imf}}$, então f pode não ser inversível.
18. Prove que se f e g são funções injetoras, $g \circ f$ é também injetora e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

19. Prove:
    (a) Se f é uma função, $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
    (b) Se f é uma função, $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.
20. Dê exemplo de uma função f e um conjunto A tais que $f \cap A^2 \neq f \restriction A$.
21. Mostre que todo sistema de conjuntos pode ser indexado por uma função. [Dica: Tome $I = A$ e ponha $S_i = i$ para todo $i \in A$.]
22. (a) Mostre que o conjunto $B^A = \{f | f \text{ é função, domf = A, imf} \subseteq \text{B}\}$ existe. [Dica: $B^A \subseteq \wp(A \times B)$.]
    (b) Seja $\langle S_i | i \in I\rangle$ uma sistema indexado de conjuntos; mostre que $\prod_{i\in I} S_i$ existe. [Dica: $\prod_{i\in I} S_i \subseteq \wp(I \times \bigcup_{i\in I} S_i)$.]
23. Mostre que uniões e intersecções satisfazem a seguinte forma geral da lei associativa:

$$\bigcup_{a\in\bigcup S} F_a = \bigcup_{C\in S}(\bigcup_{a\in C} F_a),$$

$$\bigcap_{a\in\bigcup S} F_a = \bigcap_{C\in S}(\bigcap_{a\in C} F_a),$$

    se S é um sistema não vazio de conjuntos não vazios.
24. Outras propriedades de uniões e intersecções podem ser generalizadas similarmente.

    Leis de De Morgan:

$$B \setminus \bigcup_{a\in A} F_a = \bigcap_{a\in A}(B \setminus F_a),$$

$$B \setminus \bigcap_{a\in A} F_a = \bigcup_{a\in A}(B \setminus F_a),$$

    Leis distributivas:

$$(\bigcup_{a\in A} F_a) \cap (\bigcup_{b\in B} G_b) = \bigcup_{(a,b)\in A\times B}(F_a \cap G_b),$$

$$(\bigcap_{a\in A} F_a) \cup (\bigcap_{b\in B} G_b) = \bigcap_{(a,b)\in A\times B}(F_a \cup G_b),$$

25. Seja f uma função. Então

$$f[\bigcup_{a\in A} F_a] = \bigcup_{a\in A} f[F_a],$$

$$f^{-1}[\bigcup_{a\in A} F_a] = \bigcup_{a\in A} f^{-1}[F_a],$$

$$f[\bigcap_{a\in A} F_a] \subseteq \bigcap_{a\in A} f[F_a],$$

$$f^{-1}[\bigcap_{a\in A} F_a] = \bigcap_{a\in A} f^{-1}[F_a].$$

Se f é injetora, então $\subseteq$ na terceira fórmula pode ser substituído por $=$.

26. Prove a seguinte forma da lei distributiva:

$$\bigcap_{a\in A}(\bigcup_{b\in B} F_{a,b}) = \bigcup_{f\in B^A}(\bigcap_{a\in A} F_{a,f(a)}),$$

assumindo que $F_{a,b_1} \cap F_{a,b_2} = \emptyset$ para todo $a \in A$ e $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$.

[Dica: Seja L o conjunto da esquerda e R o conjunto da direita. $F_{a,f(a)} \subseteq \bigcup_{b\in B} F_{a,b}$; portanto $\bigcap_{a\in A} F_{a,f(a)} \subseteq \bigcap_a \in A(\bigcup_{b\in B} F_{a,b}) = L$, e assim $R \subseteq L$. Para provar que $L \subseteq R$, tome $x \in L$. Ponha $(a, b) \in f$ se, e somente se, $x \in F_{a,b}$ e prove que f é uma função de A em B tal que $x \in \bigcap_{a\in A} F_{a,f(a)}$; logo $x \in R$.]

27. Para cada uma das seguintes relações, determine quais são reflexivas, simétricas ou transitivas.
    (a) O inteiro x é maior que o inteiro y.
    (b) O inteiro n divide o inteiro m.
    (c) $x \neq y$ no conjunto de todos os números naturais.
    (d) $\subseteq$ e $\subsetneqq$ em $\wp(A)$.
    (e) $\emptyset$ em $\emptyset$.
    (f) $\emptyset$ em um conjunto não vazio A.
28. Seja f uma função de A em B sobrejetora. Defina uma relação E em A por: aEb se, e somente se, $f(a) = f(b)$.
    (a) Mostre que E é uma relação de equivalência em A.
    (b) Defina uma função φ em A/E como $\varphi([a]_E) = f(a)$ (verifique que $\varphi([a_E]) = \varphi([a'_E])$ se $[a_E] = [a'_E]$).
    (c) Seja j a função de A em A/E dada por $j(a) = [a_E]$. Mostre que $\varphi \circ j = f$.
29. Seja R uma ordenação de A. Mostre que R^{-1} é também uma ordenação de A e, para $B \subseteq A$,
    (a) a é o menor elemento de B em R^{-1} se, e somente se, a é o maior elemento de B em R.
    (b) analogamente para minimal e maximal ou supremo e ínfimo.
30. Dê exemplos de um conjunto ordenado $(A, \leqslant)$ e um subconjunto B de A tais que
    (a) B não tem maior elemento.
    (b) B não tem menor elemento.
    (c) B não tem maior elemento, mas B tem um supremo.
    (d) B não tem supremo.

31. Seja R uma relação reflexiva e transitiva em A (R é chamada de *pré ordem* em A). Defina E em A por

$$aEb \text{ se, e somente se, } aRb \text{ e } bRa.$$

Mostre que E é uma relação de equivalência em A. Defina a relação R/E em A/E como

$$[a]_E R/E [b]_E \text{ se, e somente se, } aRb.$$

Mostre que a definição não depende da escolha dos representantes para $[a]_E$ e $[b]_E$. Prove que R/E é uma ordem em A/E.

32. Seja $A = \wp(X)$, $X \neq \emptyset$. Prove:
   (a) Qualquer $S \subseteq A$ tem supremo na ordem $\subseteq_A$; $\sup S = \bigcup S$.
   (b) Qualquer $S \subseteq A$ tem ínfimo em $\subseteq_A$; $\inf S = \bigcap S$, se $S \neq \emptyset$; $\inf \emptyset = X$.

33. Seja $\mathrm{Fn(X,Y)}$ o conjunto de todas as funções definidas num subconjunto de X em Y [i.e., $\mathrm{Fn(X,Y)} = \bigcup_{\mathrm{Z} \subseteq \mathrm{X}} \mathrm{Y^Z}$]. Defina uma relação $\leqslant$ em $\mathrm{Fn(X,Y)}$ por

$$f \leqslant g \text{ se, e somente se, } f \subseteq g.$$

   (a) Prove que $\leqslant$ é uma ordem em $\mathrm{Fn(X,Y)}$.
   (b) Seja $F \subseteq \mathrm{Fn(X,Y)}$. Mostre que $\sup F$ existe se, e somente se, F é um sistema compatível de funções; então $\sup F = \bigcup F$.