MAT 330 - TEORIA DOS CONJUNTOS
1º SEMESTRE 2014
BACHARELADO - IME

LISTA 1

1. Mostre que o conjunto de todos os x tais que $x \in A$ e $x \notin B$ existe.
2. (a) Prove que um "conjunto de todos os conjuntos" não existe. [Dica: se V é um conjunto de todos os conjuntos, considere $\{x \in V | x \notin x\}$.]
   (b) Prove que para qualquer conjunto A, existe algum $x \notin A$.
3. Sejam A e B conjuntos. Mostre que existe um único conjunto C tal que $x \in C$ se, e somente se, ou $x \in A$ e $x \notin B$, ou $x \in B$ e $x \notin A$.
4. (a) Dados A, B e C existe um conjunto P tal que $x \in P$ se, e somente se, $x = A$ ou $x = B$ ou $x = C$.
   (b) Generalize para quatro elementos.
5. Mostre que $\wp(X) \subseteq X$ é falso para todo X. Em particular, $\wp(X) \neq X$ para todo X. Isto prova novamente que um "conjunto de todos os conjuntos" não existe. [Dica: Considere $Y = \{u \in X | u \notin u\}$; $Y \in \wp(X)$ mas $Y \notin X$.]
6. Mostre que:
   (a) $A \cap B = B \cap A$ (b) $A \cup B = B \cup A$
   (c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   (e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   (g) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ (h) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
7. Mostre que:
   (a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
   (b) $A \setminus B = \emptyset$ se, e somente se, $A \subseteq B$;
   (c) $A \triangle A = \emptyset$;
   (d) $A \triangle B = B \triangle A$;
   (e) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
8. Mostre que:
   (a) $A \subseteq B$ se, e somente se, $A \cap B = A$ se, e somente se, $A \cup B = B$ se, e somente se, $A \setminus B = \emptyset$;
   (b) $A \subseteq B \cap C$ se, e somente se, $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$;
   (c) $B \cup C \subseteq A$ se, e somente se, $B \subseteq A$ e $C \subseteq A$;
   (d) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
   (e) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;
   (f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
   (g) $A = B$ se, e somente se $A \triangle B = \emptyset$.
9. Para cada uma das seguintes afirmações (falsas), desenhe um diagrama de Venn no qual ela falha:
   (a) $A \setminus B = B \setminus A$.
   (b) $A \cap B \subseteq A$.
   (c) $A \subseteq B \cup C$ implica $A \subseteq B$ ou $A \subseteq C$.
   (d) $B \cap C \subseteq A$ implica $B \subseteq A$ ou $C \subseteq A$.

10. Sejam $S \neq \emptyset$ e A conjuntos.
   (a) Considere $T_1 = \{Y \in \wp(A) | Y = A \cap X \text{ para algum } X \in S\}$, e prove que $A \cap \bigcup S = \bigcup T_1$ (lei distributiva generalizada).
   (b) Considere $T_2 = \{Y \in \wp(A) | Y = A \setminus X \text{ para algum } X \in S\}$ e prove que
$$A \setminus \bigcup S = \bigcap T_2$$
$$A \setminus \bigcap S = \bigcup T_2$$
   (leis de De Morgan generalizadas).
11. (a) O que são $\bigcup\{x\}$ e $\bigcap\{x\}$?
   (b) O que é $\bigcup \emptyset$?
12. Prove que $\bigcap S$ existe para todo $S \neq \emptyset$. Onde a hipótese $S \neq \emptyset$ foi usada na prova?