MAT 2352 - CÁLC. PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS VAR. II
2º SEMESTRE 2014

LISTA 3

1. Calcule as integrais abaixo, esboçando o domínio de integração.
   (a) $\iiint\limits_B xyz dxdydz$, onde B é o paralelepípedo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, e $1 \le z \le 2$.
   (b) $\iiint\limits_B x dxdydz$, onde B é o sólido dado por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, e $x + y \le z \le x + y + 1$.
   (c) $\iiint\limits_B \sqrt{1 - z^2} dxdydz$, onde $B = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1,\ 0 \le y \le z\}$.
   (d) $\iiint\limits_B \sqrt{1 - z^2} dxdydz$, onde B é o cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, e $0 \le z \le 1$.
   (e) $\iiint\limits_B dxdydz$, onde B é o sólido dado por $x^2 + y^2 \le z \le 2x$.
   (f) $\iiint\limits_B (x^2 + z^2) dxdydz$, onde B é o cilindro $x^2 + y^2 \le 1$, $0 \le z \le 1$.
   (g) $\iiint\limits_B dxdydz$, onde B é dado por $x^2 + y^2 \le z \le 2x + 2y - 1$.
   (h) $\iiint\limits_B y dxdydz$, onde B é dado por $x^2 + 4y^2 \le 1$, $0 \le z \le 1$.
   (i) $\iiint\limits_B x dxdydz$, onde B é dado por $x^2 + y^2 \le 4$, $x \ge 0$, e $x + y \le z \le x + y + 1$.
   (j) $\iiint\limits_S xy^2z^3 dxdydz$, onde S é o sólido limitado pela superfície $z = xy$ e os planos $y = x$, $x = 1$, e $z = 0$.
   (k) $\iiint\limits_S (1+x+y+z)^{-3} dxdydz$, onde S é o sólido limitado pelos três planos coordenados e o plano $x+y+z = 1$.
   (l) $\iiint\limits_S xyz dxdydz$, onde $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$.
   (m) $\iiint\limits_S \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} dxdydz$, onde S é o sólido limitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
   (n) $\iiint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$, onde S é o sólido limitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$, e o plano $z = 1$.

   Resp: a)$\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{\pi}{4}$; e) $\frac{\pi}{2}$; f) $\frac{7\pi}{12}$; g) $\frac{\pi}{2}$; h) 0; i) $\frac{16}{3}$; j) $\frac{1}{364}$; k) $log \sqrt{2} - \frac{5}{16}$; l) $\frac{1}{38}$; m)$\frac{4}{5}\pi abc$; n)$\frac{\pi}{6}$.

2. Escreva as integrais abaixo em duas ordens diferentes da original e esboce o domínio de integração:
   (a) $\int_0^2 \int_0^z \int_0^x f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$
   (b) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^{y+2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$
   (c) $\int_0^1 \int_y^1 \int_{y^2}^1 f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$
   (d) $\int_0^9 \int_0^{3-\sqrt{x}} \int_0^{3-z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$
   (e) $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

3. Seja S o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$, e seja $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$. Seja $\vec{n}$ a normal unitária exterior a S. Calcule o valor de $\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ usando:
   (a) A representação vetorial $\vec{r}(u, v) = \sin u \cos v\vec{i} + \sin u \sin v\vec{j} + \cos u\vec{k}$
   (b) A representação explícita $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

4. Calcule a área das superfícies abaixo:

   (a) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $y = -1$ e $y = 3$.
   (b) S é a parte do plano $z = 2x + 3y$ que é interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 16$.
   (c) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.
   (d) S é a parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dentro do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (e) S é a superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x - 2)^2 + 4y^2 \leq 1$.
   (f) S é a parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$.
   (g) S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leq 2x$, fora do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ e acima do plano xy.

   Resp: a)8π; b) $16\pi\sqrt{14}$; c) $8a^2$; d) $\pi(2 - \sqrt{2})$; e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; f) $2\pi(2 - \sqrt{2})$; g) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

5. Calcule as integrais de superfície:

   (a) $\iint_S x^2 dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
   (b) $\iint_S y dS$, onde S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está contido no primeiro octante.
   (c) $\iint_S z(x^2 + y^2) dS$, onde S é o hemisfério $z \geq 0$ da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
   (d) $\iint_S xy dS$, onde S é a região do parabolóide $z = x^2 + y^2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leq 2x$, $y \geq 0$.
   (e) $\iint_S x dS$, onde S é a parte da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ situada entre os planos $z = 1$ e $z = 3$.
   (f) $\iint_S z dS$, onde S é a parte da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ que se encontra acima do parabolóide $4z = x^2 + y^2 + 3$.

   Resp.: a) $4\pi/3$; b) $3\sqrt{14}$; c) 16π; d) $\frac{1}{30}$; e) 0; f) $\frac{52\pi\sqrt{2}}{3}$

6. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ nos seguintes casos:

   (a) $\vec{F}(x, y, z) = (x, xy, xz)$ e S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.
   (b) $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, -2y - 1, z)$ e S é retângulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, orientado de modo que $\vec{n} \cdot \vec{j} > 0$.
   (c) $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 3z)$ e S é o hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, orientada de maneira que a normal no ponto $(0, 0, 4)$ é $\vec{k}$.
   (d) $\vec{F}(x, y, z) = (y - x, z - y, y - x)$ e S é o cubo limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ orientado com normal exterior.
   (e) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 y, xy^2, 5 - 4xyz)$ e S a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, orientada com campo normal $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.
   (f) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + z^3, z^5, e^{x^2+y^2} + z^2)$ e S é a parte de $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ interior a $z^2 = x^2 + y^2$, com normal exterior.

   Resp.: a) $-3\pi/4$, b) -1 , c) 128π , d) -16 , e) 20π , f) $17\pi/6 + \pi e$.

7. Use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S (rot\vec{F}) \cdot \vec{n} dS$ nos seguintes casos:

   (a) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$ e S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, e $\vec{n}$ é a normal unitária com componente z não-negativa.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, onde S é a porção do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$, e $\vec{n}$ é a normal com componente z não-negativa.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (y-z, yz, -xz)$, onde S consiste das cinco faces do cubo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ que não estão no plano$-xy$. A normal unitária $\vec{n}$ é a normal exterior.

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (xz, -y, x^2y)$ e S consiste das 3 faces, não do plano xy, do tetraedro formado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + y + 3z = 6$, sendo $\vec{n}$ a normal exterior ao tetraedro.

Resp.: a) 0 , b) $-\pi$, c) -4 , d) $\frac{4}{3}$.

8. Use o teorema de Stokes para mostrar que as integrais de linha abaixo tem os valores indicados. Em cada caso, diga em que sentido a curva C foi percorrida.

(a) $\int_C ydx + zdy + xdz = \pi a^2\sqrt{3}$, onde C é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e o plano $x + y + z = 0$.

(b) $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+z)dz = 0$, onde C é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ e o plano $y = z$.

(c) $\int_C (y^2+z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz = \frac{9a^3}{2}$, onde C é a intersecção do plano $x + y + z = \frac{3a}{2}$ com a fronteira do cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

9. Use o teorema da divergência para calcular $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$ nos seguintes casos, e a normal sempre sendo a exterior:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, z^2)$ e S é a fronteira de $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq 4$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (-2xy, y^2, 3z)$ e S é a fronteira de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e $z \geq x + y$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2y, -xy^2, 1)$ e S o gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (y-x, z-y, y-x)$ e S é o cubo limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ orientado com normal exterior.

Resp.: a) $\frac{38}{3}$, b) 2π , c) π , d) -16.

10. Seja $\vec{F}$ um campo de classe C^1 num aberto contendo a fronteira do cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Seja $\vec{n}$ a normal unitária exterior ao cubo. Mostre que $\iint\limits_S (rot\vec{F})\cdot\vec{n}dS = 0$.