MAT 2352 - CÁLC. PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS VAR. II

2º SEMESTRE 2014

LISTA 2

1. Represente geometricamente o campo vetorial dado nos seguintes casos:
   (a) $\vec{v}(x,y) = \vec{i} + \vec{j}$;
   (b) $\vec{v}(x,y) = (1-x^2)\vec{j}$;
   (c) $\vec{v}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$;
   (d) $\vec{v}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$;
   (e) $\vec{v}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$.

2. Represente geometricamente o campo vetorial $\vec{f}(x,y) = \vec{i} + (x-y)\vec{j}$ nos pontos das seguintes retas:
   (a) $x = y$;
   (b) $y = x - 1$;
   (c) $x - 2 = y$.

3. Seja $\vec{F}(x,y) = \nabla f$, onde $f(x,y) = x + 2y$. Desenhe $\vec{F}(x,y)$ nos pontos da reta $x + 2y = 1$.

4. Seja $\vec{F}(x,y) = \nabla\varphi$, onde $\varphi(x,y,z) = x + y + z$. Desenhe $\vec{F}(x,y,z)$ nos pontos tais que $x + y + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$.

5. Seja $\gamma(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t, 2t - t^2)$, $t \in [0,2]$.
   (a) Verifique que γ é fechada.
   (b) Mostre que (0 , -1 , 3/4) é ponto múltiplo de γ.
   (c) Escreva as equações das retas tangentes à curva γ no ponto (0 , 1 , 0).

6. Calcule $\int_\gamma \vec{F}$ para:
   (a) $\vec{F}(x,y,z) = (xy, -y, 1)$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$
   (b) $\vec{F}(x,y) = (y, x^2 + y^2)$, γ formada pelos segmentos que ligam (-2 , 0) a (0 , 0) e (0 , 0) a (0 , 2).
   (c) $\vec{F}(x,y,z) = (2x, -3y, z^2)$, onde $\gamma = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (d) $\vec{F}(x,y,z) = (z^2, 0, x^2)$, onde γ é a reunião dos segmentos de reta que unem (1 , 0 , 0) a (3 , 0 , 1) e (3 , 0 , 1) a (2 , 0 , 4).

   Resp.: a) 3/4 , b) 8/3 , c) $\pi^3/24$ -5/2 , d) 17

7. Calcule:
   (a) $\int_\gamma 2yz\,dx + (z^2 - y^2)dz$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$ e $y^2 + z^2 = 4$ de (0 , 2 , 0) a (0 , 0 , 2).
   (b) $\int_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x = 0, y = 1$ e $y = x^2$, percorrida no sentido anti-horário.
   (c) $\int_\gamma 2y\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, percorrida uma vez no ponto (1 , 0 , 0) ao ponto (-1 , 0 , 0).
   (d) $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y)$, percorrida uma vez no sentido anti-horário quando vista da origem.

   Resp.: a) -8/3 , b) 3/10 , c) 0 , d) $2\sqrt{2}\pi$

8. Prove que o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y) = (x, xy)$ é nulo ao longo de qualquer circunferência com centro no eixo das abcissas.

9. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:
   (a) $\int_\gamma x^2y\,dx + xy^3\,dy$ onde γ é o quadrado com vértices (0 , 0) , (1 , 1) e (0 , 1) orientado no sentido anti-horário.

(b) $\int_\gamma (x+2y)dx + (x-2y)dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de (0 , 0) a (1 , 1) e do segmento de reta de (1 , 1) a (0 , 0).

(c) $\int_\gamma x^2\,dx + y^2\,dy$, γ é a curva $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ percorrendo no sentido anti-horário.

(d) $\int_\gamma 2xy\,dx + (x^2+x)dy$, γ é a cardióide $r = 1 + \cos\theta$ orientada no sentido anti-horário.

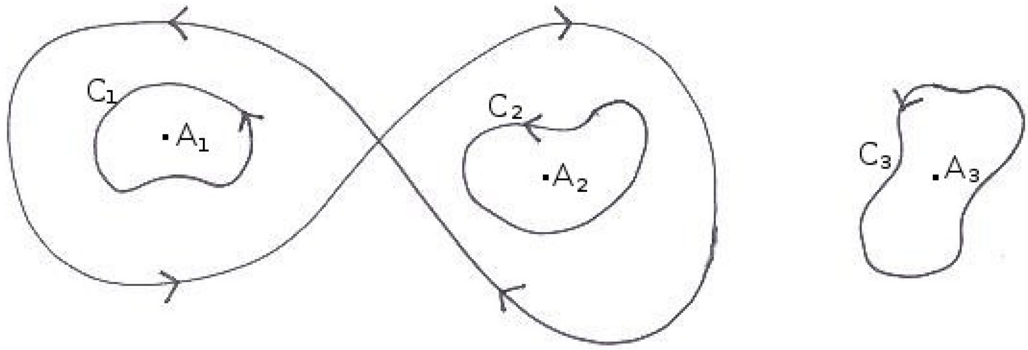
Resp.: a) -1/12 , b) -1/6 , c)0 , d) $3\pi/2$

10. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes. Dê todos os possíveis valores para as integrais:

(a) $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$

(b) $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{4x^2+9y^2}$

11. Seja $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ com P e Q com derivada parciais contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{A_1, A_2, A_3\}$ e satisfazendo $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ em $\mathbb{R}^2 - \{A_1, A_2, A_3\}$. Sejam C_1, C_2, C_3 e C como indicados na figura abaixo. Se $\int_{C_1} \vec{F} = 2$, $\int_{C_2} \vec{F} = 3$ e $\int_{C_3} \vec{F} = 4$, calcule $\int_C P\,dx + Q\,dy$ e determine três curvas C' para as quais $\int_{C'} P\,dx + Q\,dy = 1$, e que não podem ser continuamente deformadas uma a outra em $\mathbb{R}^2 - \{A_1, A_2, A_3\}$.



12. Mostre que as integrais independem do caminho e calcule-as:

(a) $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2+y^2)dy$ Resp.: $(3a^2b + b^3 - 4)/3$

(b) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin y\,dx + x\cos y\,dy$ Resp.: $a\sin b$

13. Em cada caso abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não um campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine uma função potencial.

(a) $\vec{F}(x,y) = (x, x)$ em $\mathbb{R}^2$

(b) $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$ em $\mathbb{R}^2$

(c) $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ em $\Omega = \{(x,y) \mid x > 0 \text{ se } y = 0\}$

(d) $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

14. Um campo de forças $\vec{F}$ é dito central, no plano, se $\vec{F}$ pode ser escrito na forma

$$\vec{F}(x,y) = g(r)\vec{r} \quad \text{onde} \quad \vec{r} = (x,y),\ r = \|\vec{r}\|$$

e g é da classe C^1 em $\mathbb{R}$. Mostre que $\vec{F}$ é um campo conservativo.