MAT 2352 - CÁLC. PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS VAR. II
2º SEMESTRE 2014

LISTA 1

1. Sejam A e B subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ tais que $A \subseteq B$. Mostre que se B tem conteúdo nulo, então A tem conteúdo nulo.

2. Calcule as seguintes integrais duplas:

   (a) $\iint_R (2y^2 - 3xy^3)dxdy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\}$.

   (b) $\iint_R x \sin y \, dxdy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \le x \le 4, 0 \le y \le \frac{\pi}{6}\}$.

   (c) $\iint_R \frac{1}{x+y} \, dxdy$, onde $R = [1, 2] \times [0, 1]$.

   Resp. (a) $-\frac{585}{8}$, (b) $\frac{15}{4}(2 - \sqrt{3})$, (c) $\ln \frac{27}{16}$.

3. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$. Resp. $\frac{4}{15}(2\sqrt{2} - 1)$.

4. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z^2 = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$. Resp. $\frac{9\pi}{2}$.

5. Calcule as integrais iteradas

   $$\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dydx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dxdy.$$

   Resp. $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

   As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

6. Desenhe o domínio integração das seguintes integrais duplas e as calcule:

   (a) $\iint_D xy \, dxdy$, onde $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.

   (b) $\iint_D (x^2 - 2xy) \, dxdy$, onde $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 2 - x\}$.

   (c) $\iint_D e^{x/y} \, dxdy$, onde $D = \{(x, y) : 1 \le y \le 2, y \le x \le y^3\}$.

   (d) $\iint_D x \cos y \, dxdy$, onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

   (e) $\iint_D 4y^3 \, dxdy$, onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$.

   (f) $\iint_D xy \, dxdy$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1.

   (g) $\iint_D (x^2 \text{tg}\, x + y^3 + 4) \, dxdy$, onde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 2\}$.

   Resp. (a) $\frac{1}{12}$, (b) $-\frac{19}{42}$, (c) $\frac{1}{2}e^4 - 2e$, (d) $(1 - \cos 1)/2$, (e) $\frac{500}{3}$, (f) $\frac{1}{8}$, (g) 8π.

7. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

   (a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

   (b) S é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$.

   (c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + 2y = 2$.

   (d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

   (e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$.

   (f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$.

   (g) S é limitada pelas superfícies $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$, $z = y$ e $z = 4 - y$.

   Resp. (a) $\frac{6}{35}$, (b) $\frac{31}{8}$, (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2} arcsen \frac{2}{3}$, (d) $\frac{1}{6}$, (e) $\frac{1}{3}$, (f) $\frac{16}{3}r^3$, (g) $\frac{16}{3}$.

8. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $x - 2y + 1 = 0$.

9. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

   (a) $\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dxdy$

   (b) $\int_0^3\int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\,dxdy$

   (c) $\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x\sqrt{1 + \cos^2 x}\,dxdy$

   (d) $\int_0^1\int_x^1 f(x, y)dydx$, onde $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{y}, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}$

   Resp. (a) $(e^9 - 1)/6$, (b) $\frac{1}{4}\sin 81$, (c) $(2\sqrt{2} - 1)/3$, (d) $(1 - \cos 1)$.

10. Calcule as integrais:

    (a) $\iint_R x\,dxdy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

    (b) $\iint_R xy\,dxdy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2+y^2 = 4$ e $x^2+y^2 = 25$.

    (c) $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, onde R é a região interior à cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

    (d) $\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

    (e) $\iint_D (x - y)^2 \sin(x + y)\,dxdy$, sendo D o paralelogramo de vértices $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(\pi, 0)$ e $(0, \pi)$.

    Resp. (a) zero, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$, (e) zero

11. Seja f definida no retângulo $Q = [0,1] \times [0,1]$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Prove que a integral $\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$ existe e vale 0.