MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2013 - $2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

1. Sejam $f(x) = x^3 + 5x - 6$ e g a função inversa de f. Admitindo que g e g' são deriváveis, calcule g' e g'' em termos de g. Determine $g''(0)$. Resp: $g''(0) = -\dfrac{3}{256}$

2. Sejam $f(x) = x^3 + \ln x$, $x > 0$ e g a função inversa de f. Admitindo que g é derivável, calcule g' em termos de g. Determine $g'(1)$. Resp: $g'(1) = \dfrac{1}{4}$

3. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ com $0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função injetora tal que $(x, f(x))$ é solução da equação $y^5 + ye^x + 3xe^{y+1} + 2 = 7\,\text{sen}\,x$, para todo $x \in I$. Seja g a inversa de f. Supondo que f e g são funções deriváveis, determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa -1. Resp: $5y = 6x + 6$

4. Seja $h(x) = 2x + \cos x$. Mostre que h é bijetora e, admitindo h^{-1} derivável, determine $(h^{-1})'(1)$. Resp: $\dfrac{1}{2}$

5. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (c) $f(x) = e^{e^x}$

   (d) $f(x) = x^e + e^x$ (e) $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{x^2}}$ (f) $f(x) = x^2 e^{\text{arctg}\,x}$

   (g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$ (h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

   (j) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (k) $f(x) = \ln(\text{arctg}\,x)$ (l) $f(x) = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\text{sen}\,x}$

   (m) $f(x) = (e^x + 3x)^{\text{arcsen}(x^2)}$ (n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\text{tg}(x^2)}$ (o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$

   (p) $f(x) = (x^2+1)^{\text{sen}(x^5)}$ (q) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (r) $f(x) = (1 + \text{arctg}\,x^2)^{1/x^4}$

   OBSERVAÇÃO. As funções (a) e (b) são chamadas, respectivamente, de cosseno hiperbolico e de seno hiperbolico e são denotadas, respectivamente, por cosh e senh. Verifique que:
   $\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) = 1$, $\cosh'(x) = \text{senh}(x)$ e $\text{senh}'(x) = \cosh(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

   (a) $|\text{sen}\,b - \text{sen}\,a| \le |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

   (b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \le \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \ge 1$ e $b \ge 1$.

   (c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \le |a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \ge 1$ e $b \ge 1$.

   (d) $b^b - a^a > a^a(b - a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \le a < b$.

   (e) $e^x - e^y \ge x - y$, para todos x, y com $x \ge y \ge 0$.

7. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$ e seja g a sua inversa. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que

$$g(b) - g(a) \le \frac{1}{2}(b - a).$$

8. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1,+\infty[$ tal que $f(0)=0$ e $0<f'(x)\leq 1$, para todo $x>0$. Mostre que $0<f(x)\leq x$, para todo $x>0$.

9. Mostre que $f(x)=(1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente em $]0,+\infty[$. Conclua que

$$(1+\pi)^e<(1+e)^\pi.$$

10. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$, para todo $x>1$

(b) $\mathrm{e}^\pi>\pi^\mathrm{e}$

(c) $\dfrac{\operatorname{tg}\, b}{\operatorname{tg}\, a}>\dfrac{b}{a}$, para $0<a<b<\frac{\pi}{2}$

(d) $x-\dfrac{x^3}{3!}<\operatorname{sen} x<x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$, para $x>0$

(e) $\sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}x$, para $x>0$

(f) $2x\operatorname{arctg} x>\ln(1+x^2)$, para $x>0$

(g) $\dfrac{\ln b}{b}<\dfrac{\ln a}{a}\leq\dfrac{b-a}{a^2}$, para $1\leq a<b\leq \mathrm{e}$

11. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$. Suponha que x_0 seja um ponto crítico de g. Prove que $x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

12. Calcule, caso exista

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}(\ln x)^{(x-1)}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\mathrm{e}^{2x}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^p\ln x,\ p>0$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\left(\frac{p}{x}\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(x\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+3x)^{1/x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x\operatorname{arctg} x}$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+5x)^{3/x}$

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}\, x+2x^2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\operatorname{tg} x\sec x-\sec^2 x)$

(t) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6x+1}{6x-1}\right)^x$

(u) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{sen} x}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$

(x) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}}$

(y) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1-\cos\, x)^x$

(z) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$

(w) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+3)^{x+4}-\ln(x+2)^{x+4}\right)$

Resp: (a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 1 (e) 0 (f) 0 (g) 0 (h) p (i) $\frac{1}{6}$ (j) 1 (k) 1 (l) e^4 (m) 1 (n) $+\infty$ (o) $\dfrac{2}{3}$ (p) 1 (q) e^{15} (r) 3 (s) $-\dfrac{1}{2}$ (t) $\sqrt[3]{\mathrm{e}}$ (u) e^2 (v) e (x) $\mathrm{e}^{3/2}$ (y) 1 (z) $\mathrm{e}^{2/\pi}$ (w) 1

13. No seu livro de Cálculo de 1696, L'Hospital ilustrou sua regra com o cálculo do seguinte limite:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$$

sendo $a>0$ um número fixado. Calcule este limite. Resp: $\dfrac{16a}{9}$

14. Determine $c \in \mathbb{R}$ para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma única raiz real.

Resp: $c < -27$ ou $c > 5$

15. Para quais valores de $k \in \mathbb{R}$ a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três soluções reais distintas ?

Resp: $4 < k < 5$

16. Seja $f(x) = x^7 + \pi x^3 - 8x^2 + ex + 1$. Quantas soluções reais distintas tem a equação $f''(x) = 0$? Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente três soluções reais distintas.

Resp: $f''(x) = 0$ tem somente uma solução real

17. Seja $g(x) = e^{3x} + 8x - \text{sen}(\pi x)$. Mostre que g tem exatamente uma raiz real(isto é, g se anula uma única vez) e localize-a entre dois inteiros consecutivos.

Resp: raiz em $]0, -1[$

18. Seja $f(x) = (x + 6)e^{1/x}$. Para quais valores de k a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções reais.

Resp: $0 < k < 4e^{-1/2}$ ou $k > 9$

19. Suponha $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua e $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in [0, 1]$. Prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

20. Prove que existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(\frac{c\pi}{2}) = 2 - 3c$.

21. Prove que, se p é um polinômio, então a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções reais.

22. Suponha $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua, $f(0) = 1$ e $f(x)$ um número racional para todo $x \in [0, 1]$. Prove que $f(x) = 1$, para todo $x \in [0, 1]$.

23. Seja f um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que f tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

24. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e com um único ponto crítico x_0. Prove que, se x_0 for ponto de mínimo (máximo) local de f, então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f.

25. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que, se $f'(a)f'(b) > 0$, então existe c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

26. Para que números positivos a a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$?

Resp: $a \leq e^{1/e}$

27. Determine, caso exista, a constante a para que $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ tenha:

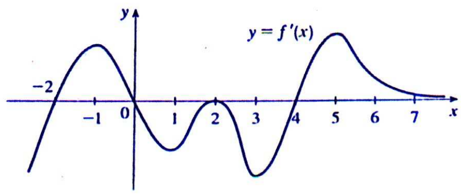
(a) um ponto de mínimo local em $x = 2$.

(b) um ponto de mínimo local em $x = -3$.

(c) Mostre que, para qualquer valor de a , a função f não terá um ponto de máximo local.

Resp: (a) $a = 16$; (b) $a = -54$

28. Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



Em que intervalos f é crescente ou decrescente? Para quais valores x_0 a função f tem um ponto máximo local em x_0 ou um ponto mínimo local em x_0? Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo? Ache os pontos de inflexão de f. Admitindo que $f(0) = 0$, faça um esboço do possível gráfico de f.

29. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$
(b) $f(x) = 3 + \dfrac{x}{x^2+1}$
(c) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-8}{x+2}$
(d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$
(e) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$
(f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
(g) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
(h) $f(x) = x - 5\ln(x+2) - \dfrac{6}{x+2}$
(i) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$
(j) $f(x) = x^2 \ln x$
(k) $f(x) = \dfrac{e^{-1/x}}{x}$
(l) $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$
(m) $f(x) = \dfrac{8\ln(x+3)}{(x+3)^2}$
(n) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2+3)$
(o) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$
(p) $f(x) = e^x - e^{3x}$
(q) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$
(r) $f(x) = x^x$

30. Seja $f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-1}$. Prove que f tem exatamente um ponto de inflexão e que esse ponto pertence ao intervalo $]-3,-2[$. Esboce o gráfico de f.

31. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações abaixo são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique.

(a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Se f é derivável até segunda ordem com $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

(d) Se existe uma assíntota para f (quando $x \to +\infty$) com coeficiente angular m e se existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = L$, então $L = m$.

(e) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, então f tem uma assíntota com coeficiente angular igual a m.

Resp: verdadeiras: (b) e (d); falsas: (a), (c) e (e)

32. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$. Resp: $x_0 = 1$

(b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todos $a > 0$ e $b > 0$.

33. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(b) Determine, em função de k, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

Resp: não há soluções se $k < 0$; uma solução se $k = 0$ ou $k > \dfrac{4}{e^2}$; duas soluções se $k = \dfrac{4}{e^2}$, três soluções se $0 < k < \dfrac{4}{e^2}$

34. Achar os valores máximo e mínimo de:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$.

(b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, $-1 \leq x \leq 2$.

(e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$, $0 \leq x \leq 3$.

Resp: (a) -1; $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{\frac{17}{8}}$; $\sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$ (c) 4; 1 (d) $\sqrt[3]{-3}$; 0 (e) 0; 27

35. Seja $f(x) = 5x^2 + \dfrac{a}{x^5}$, $x > 0$, onde $a > 0$. Ache o menor valor de a para o qual tem-se: $f(x) \geq 28$ para todo $x > 0$. Resp: $a = 2^8$

36. Qual é o menor valor da constante a para o qual a desigualdade $ax + \dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ é válida para todo $x > 0$. Resp: $a = 2$

37. Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado.

(a) Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata? Resp: 1

(b) Ache a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza o custo do material utilizado para fazer a lata. Resp: $\dfrac{4}{\pi}$

OBSERVAÇÃO. Em geral, o metal utilizado para fazer uma lata cilíndrica vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Esse pode ser um dos motivos de não encontrarmos, em geral, as latas obtidas em (a) no mercado.

38. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.

Resp: altura: 4; raio: $2\sqrt{2}$

39. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes. Resp: maximiza: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$; minimiza: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi + 12}}$

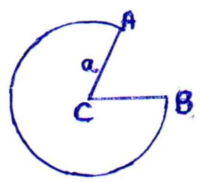
40. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

41. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter? Resp: $\dfrac{\pi}{4}$

42. Sejam r e s duas retas paralelas com a distância entre elas igual 2. Fixe um ponto C sobre a reta s. Fixe dois pontos A e B sobre a reta r de modo que a distância entre os pontos A e B seja 1. É possível encontrar um ponto D na reta s, de modo que o segmento BD intercepte o segmento AC em um ponto P de forma que a soma das áreas dos triângulos ABP e DCP seja mínima? E seja máxima? Nos casos em que a resposta for afirmativa, determine a altura do triângulo ABP. Resp: Soma mínima: altura $\sqrt{2}$. A soma não pode ser máxima.

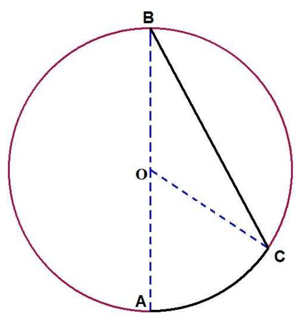
43. Sejam a, $b > 0$. Determine, caso exista, o perímetro mínimo dos triângulos de base b e altura (relativa à base dada) a. Resp: $b + \sqrt{b^2 + 4a^2}$

44. Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB (ver figura). Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima. Resp: $\sqrt{2}$



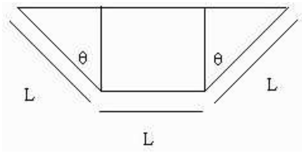
45. Para ir de um ponto A a um ponto B diametralmente oposto de uma piscina circular de 10m de diâmetro, uma pessoa pode caminhar (com velocidade constante) pela borda da piscina até um ponto C e nadar (com velocidade constante) em linha reta até o ponto B (veja a figura). Seja α o ângulo AOC. Sabendo que ela pode caminhar duas vezes mais rápido do que pode nadar, determine, em termos de α, as trajetórias que o levam ao seu destino no maior e no menor tempo. (Observação. Considere que ela pode somente caminhar ou somente nadar.)

Resp: menor tempo: $\alpha = \pi$; maior tempo: $\alpha = \pi/3$



46. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro? Resp: $\left(1+\sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$

47. Um reservatório tem fundo horizontal e seção transversal como se mostra na figura. Achar a inclinação dos lados com a vertical de modo a obter a máxima capacidade. Resp: $\theta = \dfrac{\pi}{6}$



48. Sabe-se que $g(x) = x + e^{x^2}$ é uma primitiva de f.

(a) Prove que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

(b) Prove que f tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = c$.

49. Seja k um número real. Prove que todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = kf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ são da forma ce^{kx}, com $c \in \mathbb{R}$.

50. Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) $\displaystyle\int (2x^4 + 8x - 4)\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \cos(7x)\, dx$

(d) $\displaystyle\int \sec^2(5x)\, dx$ (e) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(6x)\, dx$ (f) $\displaystyle\int \cos^2(3x)\, dx$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(9x)\, dx$ (h) $\displaystyle\int 3e^{6x}\, dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + 16x^2}\, dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + (3x+1)^2}\, dx$ (k) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2x+1} + 3\operatorname{sen}(4x)\right) dx$ (l) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^3}\, dx$

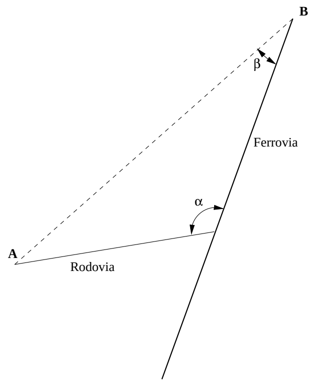
(m) $\displaystyle\int \left(\sqrt{2x+1} + \frac{1}{e^{2x}}\right) dx$ (n) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+3x}\, dx$ (o) $\displaystyle\int \left(3x^5 + \frac{1}{\sqrt[6]{1+8x}}\right) dx$

(p) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{(6-5x)^4} + \frac{4}{3-8x}\right) dx$ (q) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} + \frac{6}{5x-8}\right) dx$ (r) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(5x+2)^2}}\, dx$

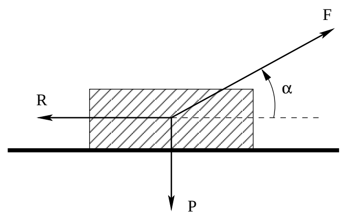
OBSERVAÇÃO. As respostas do exercício acima estão após os exercícios complementares.

Exercícios Complementares

51. Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$. Resp: $\pi - \max\{\beta, \arccos(\frac{1}{m})\}$



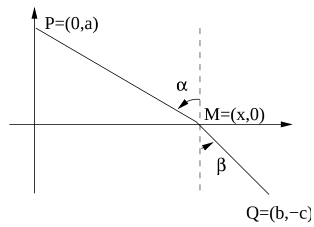
52. Um corpo de peso P apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força de intensidade F. Qual o ângulo α com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito $\mu > 0$? Resp: $\operatorname{arctg} \mu$



OBSERVAÇÃO. Para cada $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixo, o valor mínimo da força F para movimentar o bloco é tal que a diferença entre a componente horizontal de F e a força de atrito R seja positiva, i.e. $F \cos \alpha - \mu(P - F \sin \alpha) \geq 0$, ou seja, $F \geq \frac{\mu P}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$.

53. (LEI DE REFRAÇÃO DE SNELLIUS) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como conseqüência do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

    Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura abaixo). Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{u} = \dfrac{\operatorname{sen} \beta}{v}$.



OBSERVAÇÃO. A *lei da reflexão plana* também pode ser obtida como conseqüência do mesmo princípio (verifique!).

54. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina? Resp: $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$

Respostas

50. (a) $\dfrac{2x^5}{5}+4x^2-4x+k$ (b) $\dfrac{x^6}{6}+x-\dfrac{1}{x}+k$ (c) $\dfrac{\operatorname{sen}(7x)}{7}+k$

(d) $\dfrac{\operatorname{tg}(5x)}{5}+k$ (e) $\dfrac{\operatorname{tg}(6x)}{6}-x+k$ (f) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{12}+k$

(g) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\operatorname{sen}(18x)}{36}+k$ (h) $\dfrac{e^{6x}}{2}+k$ (i) $\dfrac{\operatorname{arctg}(4x)}{4}+k$

(j) $\dfrac{\operatorname{arctg}(3x+1)}{3}+k$ (k) $\dfrac{\ln|2x+1|}{2}-\dfrac{3\cos(4x)}{4}+k$ (l) $\dfrac{-1}{4(2x+3)^2}+k$

(m) $\dfrac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}-\dfrac{1}{2e^{2x}}+k$ (n) $\dfrac{\sqrt[3]{(1+3x)^4}}{4}+k$ (o) $\dfrac{x^6}{2}+\dfrac{3\sqrt[6]{(1+8x)^5}}{20}+k$

(p) $\dfrac{2}{15(6-5x)^3}-\dfrac{\ln|3-8x|}{2}+k$ (q) $\dfrac{\operatorname{arcsen}(3x)}{3}+\dfrac{6\ln|5x-8|}{5}+k$ (r) $\dfrac{\operatorname{arcsen}(5x+2)}{5}+k$