1. (2,0) Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Prove, se for verdadeira, e dê um contra-exemplo, caso seja falsa.

   (a) Se $(a_n)_n$ converge para L, então $(-a_n)_n$ converge para $-L$.

   (b) Se $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são convergentes, então $(\frac{a_n}{b_n})_n$ é convergente.

(a) verdadeira

Dado $\varepsilon > 0$, como $(a_n)_n$ converge para L, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$, então $|a_n - L| < \varepsilon$.

Daí, se $n \geqslant n_0$, então $|(-a_n) - (-L)| = |-(a_n + L)| = |a_n - L| < \varepsilon$.

$|x| = |-x| \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Portanto, $(-a_n)_n$ converge para $-L$.

(b) falsa

Seja $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Daí, $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ convergem para 0.

Mas $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{1} = n$ não é convergente.

2. (3,0) Escolha dois dos itens abaixo e decida se cada uma das séries converge ou diverge. Justifique sua resposta.

(a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^2+20}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{2}{3^n}\right)$

(a) Note que a sequência

$$\frac{3}{\sqrt[3]{n^2+20}} = \frac{3}{n^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{20}{n^2}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{e} \quad \left(1+\frac{20}{n^2}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ converge para } 1.$$

Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$, $\left(1+\frac{20}{n^2}\right)^{\frac{2}{3}} \leqslant 2$.

(Obs: poderia também usar o fato que para $n \geqslant 3$, $\frac{20}{n^2} \leq 10$, por exemplo).

Assim, para $n \geqslant n_0$, temos que $\frac{3}{\sqrt[3]{n^2+20}} = \frac{3}{n^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{20}{n^2}\right)^{\frac{2}{3}}} \geqslant \frac{3}{2 \cdot n^{\frac{2}{3}}}$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^{\frac{2}{3}}}$ diverge (usando (I) da capa), temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^2+20}}$ também diverge. Daí, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^2+20}}$ também diverge.

(b) Note que a sequência

$$\frac{n^2}{5n^2+4} = \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(5+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{1}{5+\frac{4}{n^2}} \text{ converge a } \frac{1}{5}.$$

Como a sequência não converge a 0, a série não pode convergir e, portanto, a série diverge.

(c) Primeiramente, observemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$$ converge, pois

$$\frac{3}{n(n+1)} \leq \frac{3}{n^2}$$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (usando (I) da capa).

Além disso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ converge (usando (II) da capa).

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{2}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

também converge.

3. (3,0) Determine todas as soluções das seguintes EDOs:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = xy - x + y - 1,\ y \geq 1$ (b) $\dfrac{dx}{dt} = -x + sen(t)$

ⓐ $\dfrac{dy}{dx} = xy - x + y - 1 = x(y-1) + y - 1 = (y-1)(x+1)$,

que é uma EDO de variáveis separáveis. Assim, temos que

$\int \dfrac{1}{y-1}\, dy = \int (x+1)\, dx$, ou seja,

$\ln(y-1) \underset{\substack{\uparrow \\ y \geq 1}}{=} \ln|y-1| = \dfrac{x^2}{2} + x + k$.

Daí, $y - 1 = e^{\frac{x^2}{2}+x} \cdot e^{k} = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}+x}$

Assim, as soluções não constantes da EDO são as funções da forma

$y(x) = c\, e^{\frac{x^2}{2}+x} + 1$.

Agora, $y - 1 = 0 \iff y = 1$. Portanto, a única solução constante da EDO é $y(x) = 1$.

(b) A EDO $\frac{dx}{dt} = -x + \operatorname{sen} t$ é uma EDO linear de 1ª ordem.

Seja $g(t) = -1$ e $f(t) = \operatorname{sen} t$ e temos que $\frac{dx}{dt} = g(t) \cdot x + f(t)$.

Daí, $G(t) = \int -1 \, dt = -t$ é uma primitiva de $g(t)$.

Considere $H(t) = \int e^{-G(t)} \operatorname{sen} t \, dt = \int e^{t} \operatorname{sen} t \, dt$

Fazendo integração por partes duas vezes, temos:

$$\int \underbrace{e^{t}}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} t \, dt}_{dv} = -e^{t} \cos t - \int e^{t}(-\cos t) \, dt = -e^{t} \cos t + \int \underbrace{e^{t}}_{u} \underbrace{\cos t \, dt}_{dv}$$

$$= -e^{t} \cos t + e^{t} \operatorname{sen} t - \int e^{t} \operatorname{sen} t \, dt.$$

Portanto, $\int e^{t} \operatorname{sen} t \, dt = \frac{e^{t}(\operatorname{sen} t - \cos t)}{2} + k$.

Segue que as soluções da EDO são as funções da forma

$$x(t) = e^{G(t)} \int e^{t} \operatorname{sen} t \, dt = e^{-t} \cdot \left(\frac{e^{t}(\operatorname{sen} t - \cos t)}{2} + k \right)$$

$$= k \cdot e^{-t} + \frac{\operatorname{sen} t - \cos t}{2}.$$

4. (2,0) Vive numa ilha uma população de certa espécie que, num dado momento inicial ($t = 0$), é de 100 indivíduos. Na ausência de outros fatores, a taxa de crescimento desta população é igual ao dobro da população atual. Levando em conta que os predadores matam 30 indivíduos por mês, determine a população desta espécie na ilha num instante t qualquer.

A taxa de crescimento da população $p(t)$ é a derivada $\frac{dp}{dt} = 2p - 30$.

Como esta é uma EDO de variáveis separáveis, temos que

$$\int \frac{1}{2p-30}\, dp = \int dt$$

Daí, $\frac{\ln(2p-30)}{2} \underset{\uparrow}{=} \frac{\ln|2p-30|}{2} = t + k$.

supondo que a pop
ñ tem como ser negativa

Ou seja, $\ln(2p-30) = 2t + 2k$ e então,

$2p - 30 = e^{2t} \cdot e^{2k} = c \cdot e^{2t}$ e, assim,

$p = \frac{c \cdot e^{2t} + 30}{2} = \frac{c \cdot e^{2t}}{2} + 15$.

Como $p(0) = 100$, temos que $100 = p(0) = \frac{c}{2} + 15$ e, portanto,

$c = 170$ e a sol. da EDO c/ $p(0) = 100$ é

$p(t) = 85e^{2t} + 15$