MAT 1352 - CÁLC. PARA FUNÇÕES DE UMA VAR. II
$2^{\underline{o}}$ SEMESTRE 2013

LISTA 7

1. Prove que se uma sequência é convergente, então seu limite é único.
2. Decida se cada uma das sequências $(a_n)_n$ abaixo converge e calcule o limite, quando existir.

   (a) $a_n = \frac{1}{2^n}$;
   (b) $a_n = \frac{1}{n!}$;
   (c) $a_n = \frac{1}{n}$;
   (d) $a_n = \frac{4}{n}$;
   (e) $a_n = (-1)^n$;
   (f) $a_n = 2^n$;
   (g) $a_n = (-2)^n$;
   (h) $a_n = 2(-1)^n$;
   (i) $a_n = n(-1)^n$;
   (j) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$;
   (k) $a_n = \mathrm{sen}(n\pi)$;
   (l) $a_n = \cos(n\pi)$;
   (m) $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{2}$;
   (n) $a_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$;
   (o) $a_n = \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})$;
   (p) $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$;
   (q) $a_n = \frac{2n^2}{7n^2+5n+1}$;
   (r) $a_n = \frac{3n\sqrt{n}+n}{2n\sqrt{n}-1}$;
   (s) $a_n = \frac{5n^3+7n\sqrt{n}-2}{4n^2+1}$;
   (t) $a_n = \frac{5n^3+7n\sqrt{n}-2}{4n^3+1}$;
   (u) $a_n = \frac{5n^3+7n\sqrt{n}-2}{4n^4+1}$.

3. Construa uma sequência que tenha uma subsequência convergindo para 3 e outra convergindo para -2.
4. Prove pela definição que a sequência $(a_n)_n$ converge para $\frac{5}{2}$, onde
$$a_n = \frac{5n^3 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 7n - 3}.$$
5. Prove que se $(a_n)_n$ converge a L, então $(b_n)_n$ também converge a L, onde
$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$
6. Prove que se $(a_n)_n$ converge a L, então $(|a_n|)_n$ converge a $|L|$.
7. Sejam M e N subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tais que $M \cup N = \mathbb{N}$ e $M \cap N = \emptyset$. Prove que se $(a_n)_n$ é uma sequência cujas subsequências $(a_n)_{n\in M}$ e $(a_n)_{n\in N}$ convergem a L, então $(a_n)_n$ também converge a L.
8. Obtenha a soma parcial da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e mostre que seu limite é 1.
9. Obtenha a soma parcial da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ e mostre que seu limite é 1.
10. Sabendo que $\log 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)} = 1 - 3\log 2$.
11. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}$.
12. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n-1}{n!} = 2$.

13. Determine quais das seguintes séries convergem e quais divergem.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\frac{1}{2})^n$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$;

(f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$;

(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 3^n}{2^{n^2}}$;

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$;

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n^2}}$;

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$;

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-23n+9}{4n^3\sqrt{n+7}-2n+\cos^3(n^2)}$.