# MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

## Lista 6

## 1 Cardinalidade de conjuntos

**Exercício 1.** Prove que:

$(a)$ Se $|A| < |B|$ e $|B| \leq |C|$, então $|A| < |C|$.

$(b)$ Se $|A| \leq |B|$ e $|B| < |C|$, então $|A| < |C|$.

**Exercício 2.** Prove que se $A \subseteq B$, então $|A| \leq |B|$.

**Exercício 3.** Prove que:

$(a)$ $|A \times B| = |B \times A|$.

$(b)$ $|(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)|$.

$(c)$ Se $B \neq \emptyset$, então $|A| \leq |A \times B|$.

**Exercício 4.** Mostre que $|S| \leq |\wp(S)|$.

**Exercício 5.** Mostre que se $|A| = |B|$, então $|\wp(A)| = |\wp(B)|$.

**Exercício 6.** Dados dois conjuntos $A$ e $S \neq \emptyset$, mostre que $|A| \leq |A^S|$.

**Exercício 7.** Mostre que se $S \subseteq T$, então $|A^S| \leq |A^T|$.

## 2 Conjuntos finitos

**Exercício 8.** Mostre que se $X$ e $Y$ são finitos, então $X \times Y$ é finito e $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

**Exercício 9.** Mostre que se $X$ é finito, então $|\wp(X)| = 2^{|X|}$.

**Exercício 10.** Mostre que se $X$ e $Y$ são finitos, então $X^Y$ tem $|X|^{|Y|}$ elementos.

**Exercício 11.** Mostre que se $A$ e $B$ são finitos e $X \subseteq A \times B$, então $|X| = \sum_{a \in A} k_a$, onde $k_a = |X \cap (\{a\} \times B)|$.

## 3 Conjuntos enumeráveis

**Exercício 12.** Suponha $|A_1| = |A_2|$ e $|B_1| = |B_2|$. Mostre que:

$(a)$ Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, então $|A_1 \cup A_2| = |B_1 \cup B_2|$.

$(b)$ $|A_1 \times A_2| = |B_1 \times B_2|$.

$(c)$ $|\mathrm{Seq}(A_1)| = |\mathrm{Seq}(A_2)|$.

**Exercício 13.** Todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável.

**Exercício 14.** Mostre que a união entre um conjunto finito e um conjunto enumerável é enumerável.

**Exercício 15.** Mostre que se $A \neq \emptyset$ é finito e $B$ é enumerável, então $A \times B$ é enumerável.

**Exercício 16.** Seja $A$ um conjunto enumerável. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \neq 0$, o conjunto $[A]^n = \{\, S \subseteq A : |S| = n \,\}$ é enumerável.

**Exercício 17.** Uma sequência $\langle s_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ de números naturais é *eventualmente constante* se existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{N}$ tais que $s_n = s$ para todo $n \geq n_0$. Mostre que o conjunto de todas sequências eventualmente constantes de números naturais é enumerável.

**Exercício 18.** Uma sequência $\langle s_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ de números naturais é *eventualmente periódica* se se existem $n_0, p \in \mathbb{N}$, com $p \geq 1$, tais que $s_{n+p} = s_n$ para todo $n \geq n_0$. Mostre que o conjunto de todas as sequências periódicas de números naturais é enumerável.

**Exercício 19.** Uma sequência $\langle s_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ de números naturais é uma *progressão aritmética* se existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n+1} = s_n + d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que o conjunto de todas as progressões aritméticas é enumerável.