MAT-331: ELEMENTOS DE TEORIA DOS CONJUNTOS

# Lista 4

## 1 Equivalências e partições

**Exercício 1.** Verifique se cada uma das relações abaixo é reflexiva, simétrica ou transitiva.

$(a)$ $>$ sobre $\mathbb{Z}$.

$(b)$ $|$ sobre $\mathbb{Z}$.

$(c)$ $\neq$ sobre $\mathbb{N}$.

$(d)$ $\subseteq$ e $\subsetneq$ sobre $\wp(A)$.

$(e)$ $\emptyset$ sobre $\emptyset$.

$(f)$ $\emptyset$ sobre um conjunto $A$ não-vazio.

**Exercício 2.** Seja $f$ uma função sobrejetora de $A$ em $B$. Defina uma relação $E$ sobre $A$ do seguinte modo: $xEy$ se, e somente se, $f(x) = f(y)$.

$(a)$ Mostre que $E$ é uma relação de equivalência sobre $A$.

$(b)$ Defina uma função $g$ de $A/E$ em $B$ por $g([a]_E) = f(a)$. Verifique que $g$ está bem-definida — *i.e.*, $[a]_E = [a']_E$ implica $g([a]_E) = g([a']_E)$ — e é sobrejetora.

$(c)$ Seja $j\colon A \to A$ a função dada por $j(a) = [a]_E$. Mostre que $g \circ j = f$.

**Exercício 3.** Dê exemplos de relações sobre $\mathbb{R}$ que são:

$(a)$ reflexivas, mas não são simétricas nem transitivas;

$(b)$ reflexivas e simétricas, mas não são transitivas.

## 2 Ordens

**Exercício 4.** Seja $R$ uma ordem de $A$. Prove que $R^{-1}$ é também uma ordem de $A$ e, para $B \subseteq A$,

$(a)$ $a$ é o *elemento mínimo* de $B$ em $R^{-1}$ se, e somente se, $a$ é o *elemento máximo* de $B$ em $R$;

$(b)$ $a$ é um *elemento minimal* de $B$ em $R^{-1}$ se, e somente se, $a$ é um *elemento maximal* de $B$ em $R$;

$(c)$ $a$ é o *supremo* de $B$ em $R^{-1}$ se, e somente se, $a$ é o *ínfimo* de $B$ em $R$;

**Exercício 5.** Dê exemplos de um conjunto ordenado finito $(A, <)$ e um subconjunto $B$ de $A$ tais que:

$(a)$ $B$ possui elemento máximo;

$(b)$ $B$ não possui elemento mínimo;

$(c)$ $B$ não possui elemento máximo, mas $B$ tem supremo;

$(d)$ $B$ não tem supremo.

**Exercício 6.** Sejam $R$ uma ordem de $A$ e $B \subseteq A$. Mostre que $R \cap B^2$ é uma ordem de $B$.

**Exercício 7.** Considere $\wp(X)$, onde $X \neq \emptyset$. Mostre que:

$(a)$ qualquer $S \subseteq A$ tem supremo na ordem $\subseteq_A$ e $\sup S = \bigcup S$;

$(b)$ qualquer $S \subseteq A$ tem ínfimo em $\subseteq_A$; se $S \neq \emptyset$, então $\inf S = \bigcap S$; $\inf \emptyset = X$.

**Exercício 8.** Mostre que se $(P, <)$ e $(Q, \prec)$ são conjuntos estritamente ordenados e isomorfos e $<$ é uma ordem linear, então $\prec$ é uma ordem linear.

**Exercício 9.** A função identidade sobre $P$ é um isomorfismo entre $(P, <)$ e $(P, <)$.

**Exercício 10.** Se $h$ é um isomorfismo entre $(P, <)$ e $(Q, \prec)$, então $h^{-1}$ é um isomorfismo entre $(Q, \prec)$ e $(P, <)$.

**Exercício 11.** Se $f$ é um isomorfismo entre $(P_1, <_1)$ e $(P_2, <_2)$ e $g$ é um isomorfismo entre $(P_2, <_2)$ e $(P_3, <_3)$, então $g \circ f$ é um isomorfismo entre $(P_1, <_1)$ e $(P_3, <_3)$.