MAT-331: ELEMENTOS DE TEORIA DOS CONJUNTOS

Lista 3

1 Pares Ordenados

Exercício 1. Prove que $(a, b) \in \wp(\wp(\{a, b\}))$ e $a, b \in \bigcup(a, b)$. De forma geral, se $a \in A$ e $b \in A$, então $(a, b) \in \wp(\wp(A))$.

Exercício 2. Prove que (a, b), (a, b, c) e (a, b, c, d) existem para todos a, b, c e d.

Exercício 3. Mostre que se $(a, b) = (b, a)$, então $a = b$.

Exercício 4. Prove que $(a, b, c) = (a', b', c')$ implica $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. Afirme e prove uma propriedade análoga para quádruplas.

Exercício 5. Encontre a, b e c tais que $((a, b), c) \neq (a, (b, c))$.

2 Relações

Exercício 6. Seja R uma relação binária. Mostre que $\mathrm{dom}(R) \subseteq \bigcup(\bigcup R)$ e $\mathrm{im}(R) \subseteq \bigcup(\bigcup R)$. Conclua a partir disto que $\mathrm{dom}(R)$ e $\mathrm{im}(R)$ existem.

Exercício 7. (a) Dadas R e S relações binárias, mostre que R^{-1} e $S \circ R$ existem.

Sugestão: Note que $R^{-1} \subseteq (\mathrm{im}(R)) \times (\mathrm{dom}(R))$ e $S \circ R \subseteq (\mathrm{dom}(R)) \times (\mathrm{im}(S))$.

(b) Para A, B e C conjuntos, mostre que $A \times B \times C$ existe.

Exercício 8. Sejam R uma relação binária e A e B conjuntos. Prove que:

(a) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$;

(b) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$; dê um exemplo onde a igualdade não vale;

(c) $R[A \setminus B] \supseteq R[A] \setminus R[B]$; dê um exemplo onde a igualdade não vale;

(d) os itens $(a) - (c)$ continuam valendo, com R^{-1} em lugar de R;

(e) $R^{-1}[R[A]] \supseteq A$ e $R[R^{-1}[B]] \supseteq B$; dê exemplos onde a igualdade não vale.

Exercício 9. Seja $R \subseteq X \times Y$. Prove que:

(a) $R[X] = \mathrm{im}(R)$ e $R^{-1}[Y] = \mathrm{dom}(R)$;

(b) se $a \notin \mathrm{dom}(R)$, então $R[\{a\}] = \emptyset$; se $b \notin \mathrm{im}(R)$, então $R^{-1}[\{b\}] = \emptyset$;

(c) $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{im}R^{-1}$; $\mathrm{im}(R) = \mathrm{dom}R^{-1}$;

(d) $(R^{-1})^{-1} = R$;

(e) $R^{-1} \circ R \supseteq \mathrm{Id}_{\mathrm{dom}(R)}$ e $R \circ R^{-1} \supseteq \mathrm{Id}_{\mathrm{im}(R)}$.

Exercício 10. Sejam $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $Y = \wp(X)$. Descreva:

(a) $\in_Y$;

(b) Id_Y.

Determine o domínio, a imagem e o corpo de ambas as relações.

Exercício 11. Prove que para quaisquer três relações binárias R, S e T,

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

Exercício 12. Dê exemplos de conjuntos X, Y e Z tais que

(a) $X \times Y \neq Y \times X$;

(b) $X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z$;

(c) $X^3 \neq X \times X^2$.

Exercício 13. Prove que:

(a) $A \times B = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$;

(b) $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$ e $A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$;

(c) o item (b) continua válido, com $\cup$ substituído por $\cap$, $\setminus$ e $\triangle$.

Exercício 14. Prove que se $X \times Z \subseteq Y \times T$ e $X \times Z \neq \emptyset$, então $X \subseteq Y$ e $Z \subseteq T$. Dê um exemplo mostrando que a hipótese de que $X \times Z \neq \emptyset$ é essencial.

3 Funções

Exercício 15. Mostre que se $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, então $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$.

Exercício 16. Para cada f abaixo, verifique se f é função e, em caso afirmativo, se é injetora e sobrejetora. Quando possível, ache a inversa (quando f não for sobrejetora, defina a inversa considerando a imagem de f).

(a) $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x^2\}$;

(b) $f = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y = 0\}$;

(c) $f = \{(x, x^{\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$;

(d) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^{\frac{1}{3}}\}$;

(e) $f = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$;

(f) $f = \{(x, \frac{1}{|x|}) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$;

(g) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}$;

(h) $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \mid y\}$.

Exercício 17. Para cada item abaixo, use a função f do item correspondente do exercício 16 e ache $f[X]$ e $f^{-1}[Y]$.

(a) $X = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ e $Y = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$;

(b) $X = Y = \mathbb{N}$;

(c) $X = \mathbb{N}$ e $Y = \mathbb{Z}$;

(d) $X = Y = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$;

(e) $X = Y = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant x \leqslant 2\}$;

(f) $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 1\}$ e $Y = \mathbb{R}$;

(g) $X = Y =]1, 2[$;

(h) $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ e $Y = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Exercício 18. Considere as seguintes funções:

$$f_1 = \{(x, 2x-1) \mid x \in \mathbb{R}\},$$
$$f_2 = \{(x, x^{\frac{1}{2}}) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\},$$
$$f_3 = \{(x, x^{\frac{1}{3}}) \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ e}$$
$$f_4 = \{(x, \tfrac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\}.$$

Determine os domínios e imagens de cada uma das seguintes funções: $f_2 \circ f_1$, $f_1 \circ f_2$, $f_3 \circ f_1$, $f_1 \circ f_3$, $f_4 \circ f_1$, $f_1 \circ f_4$, $f_2 \circ f_4$, $f_4 \circ f_2$ e $f_3 \circ f_4$.

Exercício 19. Mostre que:

(a) se f é uma função inversível, então $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{dom}(f)}$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{im}(f)}$;

(b) dada uma função f, se existem funções g e h tais que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{dom}(f)}$ e $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{im}(f)}$, então f é inversível e $f^{-1} = g = h$.

Exercício 20. Mostre que se f e g são funções injetoras, então $g \circ f$ também é uma função injetora e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercício 21. Seja f uma função. Mostre que:

(a) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$;

(b) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.