MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

Lista 1

1 Lógica

Exercício 1. Identifique a hipótese e a tese em cada uma das seguintes afirmações:

(a) Se n é inteiro, então $2n$ é um número par.

(b) Você pode trabalhar aqui somente se tiver um diploma universitário.

(c) Um carro não anda, sempre que está sem combustível.

(d) Eu receberei a bandeirada, se cruzar a linha de chegada primeiro.

(e) Continuidade é uma condição necessária para diferenciabilidade.

(f) Normalidade é condição suficiente para regularidade.

(g) Eu tenho sono na aula das 14h, sempre que almoço no bandejão.

(h) $f(x) = 5$ dado que $x > 3$.

Exercício 2. Sejam p e q as sentenças "$2 < 3$" e "$0 + 1 = 1$", respectivamente. Construa as sentenças:

(a) $p \wedge q$;

(b) $p \vee q$;

(c) $\neg(p \vee q)$;

(d) $\neg(p \wedge q)$;

(e) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

Exercício 3. Sejam p e q sentenças quaisquer. Escreva as sentenças abaixo usando apenas $\wedge$ e $\neg$:

(a) $p \vee q$;

(b) $p \to q$;

(c) $p \leftrightarrow q$.

Exercício 4. Sejam p e q sentenças. Quando escrevemos $p \vee q$ podemos ter p e q ao mesmo tempo. Escreva uma fórmula (usando os conectivos $\vee, \wedge$ e $\neg$) que diga que temos p ou q mas que não podemos ter p e q ao mesmo tempo.

Exercício 5. Escreva a negação de cada uma das seguintes afirmações:

(a) Para todo número x maior ou igual a zero, $|x| = x$.

(b) f é contínua em todos os pontos.

(c) Existe um ponto onde f é contínua.

(d) Existe um elemento neutro com relação a adição.

(e) Por quaisquer dois pontos passa uma reta.

(f) Por quaisquer dois pontos passa uma única reta.

(g) Todas as cadeiras têm quatro pernas.

(h) Todo jogador de futebol é inteligente.

(i) $\exists x > 1\ (f(x) = 3)$.

(j) $\forall x > 1\ (0 < f(x) < 4)$.

(k) $\exists x \in A\ (f(x) > x)$.

(l) $\exists y \leq 2\ (f(y) < 2 \text{ ou } g(y) \geq 7)$.

(m) $\forall x \in A\ \exists y \in B\ (x < y < 1)$.

(n) $\exists x \exists y\ (x + y = 8)$.

(o) $\forall x \exists y\ (x < y \vee y < x)$.

(p) $\exists x \forall y\ (y < x)$.

(q) $\forall x \exists y\ (x < y)$.

(r) $\forall x \exists y \forall z\ (x + y + z \leq xyz)$.

Exercício 6. Para cada afirmação abaixo, (i) reescreva a condição da definição usando somente simbologia lógica ($\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, etc); (ii) escreva a negação da parte (i) usando da mesma simbologia. **Não é necessário entender precisamente o que cada termo diz**.

(a) Uma função f é *par* se, e somente se, para todo x, $f(-x) = f(x)$.

(b) Uma função f é *periódica* se, e somente se, existe um $k > 0$, tal que, para todo x, $f(x + k) = f(x)$.

(c) Uma função f é *crescente* se, e somente se, para todo x e para todo y, se $x \leq y$, então $f(x) \leq f(y)$.

(d) Uma função f é *estritamente decrescente* se, e somente se, para todo x e para todo y, se $x < y$, então $f(x) > f(y)$.

(e) Uma função $f\colon A \to B$ é *injetora* se, e somente se, para todos x e y em A, se $f(x) = f(y)$, então $x = y$.

(f) Uma função $f\colon A \to B$ é *sobrejetora* se, e somente se, para todo y em B, existe x em A, tal que, $f(x) = y$.

(g) Uma função $f\colon D \to \mathbb{R}$ é *contínua* em $c \in D$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $|f(x) - f(c)| < \epsilon$, sempre que $|x - c| < \delta$ e $x \in D$.

(h) Uma função f é *uniformemente contínua* num conjunto S se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, sempre que x e y estão em S e $|x - y| < \delta$.

(i) O número real L é limite da função $f\colon D \to \mathbb{R}$ no ponto c se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $|f(x) - L| < \epsilon$, sempre que $x \in D$ e $0 < |x - c| < \delta$.

2 Pertinência, inclusão e potência

Exercício 7. Diga precisamente o que significa dois conjuntos serem diferentes, $x \not\subseteq y$ e $x \subsetneq y$.

Exercício 8. Mostre que o conjunto vazio é único.

Exercício 9. Mostre que para todo conjunto A vale:

(a) $\emptyset \subseteq A$;

(b) $A \subseteq A$;

(c) $A \subseteq \{a\}$ se, e somente se, $A = \{a\}$ ou $A = \emptyset$.

Exercício 10. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e justifique.

(a) $\{a, b\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$;

(b) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, a\}$;

(c) $a \in \{\{a\}\}$;

(d) $a \in \{b\}$ se, e somente se, $a = b$;

(e) $\emptyset \in \emptyset$;

(f) $\emptyset \subseteq \emptyset$;

(g) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset\}$.

Exercício 11. Escreva explicitamente os seguintes conjuntos:

(a) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n < 9\}$;

(b) $\{2r \mid r \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\{rq \mid r \in \mathbb{R} \text{ e } q \in \mathbb{Q}\}$;

(d) $\{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$;

(e) $\{i \mid i \in \{j\}\}$.

Exercício 12. Ache $\wp(\{1\})$, $\wp(\{1, 2\})$ e $\wp(\{1, 2, 3\})$. Quantos elementos você acha que tem o conjunto $\wp(\{1, 2, 3, 4\})$? E o conjunto $\wp(\{1, 2, \ldots, n\})$, onde n é um inteiro positivo?

Exercício 13. Para E um conjunto qualquer, julgue em verdadeira ou falsa as seguintes sentenças:

(a) $E \in \wp(E)$; (b) $E \subseteq \wp(E)$; (c) $\{E\} \subseteq \wp(E)$; (d) $\{E\} \in \wp(E)$.

Exercício 14. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e justifique.

(a) $x \in X$ se, e somente se, $\{x\} \in \wp(X)$;

(b) $\{x\} \in \wp(X)$ se, e somente se, $\{x\} \subseteq X$;

(c) $\{x\} \subseteq \wp(X)$ se, e somente se, $x \subseteq X$;

(d) $\emptyset \in \wp(X)$.

Exercício 15. Mostre que para quaisquer conjuntos A, B e C, temos:

(a) se $A \subseteq \emptyset$, então $A = \emptyset$;

(b) se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$;

(c) se $A \subseteq B$, então $\wp(A) \subseteq \wp(B)$.

Exercício 16. Prove ou dê um contra-exemplo.

(a) $A \neq B$ e $B \neq C \Rightarrow A \neq C$;

(b) $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq C \Rightarrow A \not\subseteq C$;

(c) $x \in B$ e $B \in C \Rightarrow x \in C$;

(d) $A \in B$ e $B \not\subseteq C \Rightarrow A \notin C$.

Exercício 17. Os conjuntos A, B e C são tais que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$; além disso, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Dizer quais das seguintes sentenças são sempre verdadeiras:

(a) $a \in C$; (b) $b \in A$; (c) $c \notin A$; (d) $d \in B$; (e) $e \notin A$; (f) $f \notin A$.

Exercício 18. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Mostre que se $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ e $C \subseteq A$, então $A = B$, $B = C$ e $C = A$.

Exercício 19. Escreva explicitamente o conjunto $\wp(X)$, onde:

(a) $X = \emptyset$;

(b) $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;

(c) $X = \{3, \{1, 4\}\}$;

(d) $X = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$;

(e) $X = \wp(\{a\})$;

(f) $X = \wp(\{a, b\})$.

Exercício 20. Prove ou dê um contra-exemplo.

(*a*) $\{x\} \in \wp(X) \Leftrightarrow x \subseteq X$;

(*b*) $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \wp(\{a, b\})$;

(*c*) $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \wp(\{a, b\})$;

(*d*) $\{a, b\} \subseteq \wp(\{a, b\})$;

(*e*) $\{a, b\} \in \wp(\{a, b\})$;

(*f*) $\{\{a, b\}\} \subseteq \wp(\{a, b\})$;

(*g*) $\{\{a, b\}\} \in \wp(\{a, b\})$;

(*h*) $\{2, 3, 4, 5\} \in \wp(\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\})$.

Exercício 21. Escreva explicitamente os conjuntos:

(*a*) $\{X \in \wp(\mathbb{N}) \mid X \in \wp(\{1, 2, 3\}) \text{ e } X \in \wp(\{2, 5\})\}$;

(*b*) $\{X \in \wp(\mathbb{N}) \mid X \in \wp(\{1, 3, 8\}) \text{ e } 8 \in X\}$.