MAT-331: Elementos de Teoria dos Conjuntos

Respostas

Lista 5

Exercício 2. Suponhamos, por absurdo, que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < k < S(n)$. De $k < S(n) = n \cup \{n\}$ segue que $k \in n$ ou $k \in \{n\}$. Se $k \in n$, então $k < n$ e, como $n < k$, temos, pela transitividade de $<$, que $n < n$, contradizendo a antissimetria da relação $<$. Se $k \in \{n\}$, então $k = n$ e, como $n < k$, temos que $n < n$, novamente, uma contradição. ∎

Exercício 6. ($\Rightarrow$) Para ver que $m \neq n$, suponha que $m = n$. Daí, $n = m < n$, isto é, $n < n$, contradizendo a antissimetria de $<$.

Resta, mostrarmos que $m \subseteq n$. Seja $k \in m$. Do exercício 5 segue que $k \in \mathbb{N}$ e $k < m$. Então, $k < m < n$. Da transitividade de $<$, temos que $k < n$, isto é, $k \in n$.

($\Leftarrow$) Como $m \neq n$ e a relação $<$ é linear, temos que $m < n$ ou $m > n$. Se $m > n$, então $n \in m \subsetneq n$, donde, $n \in n$, um absurdo. Portanto, $m < n$. ∎

Exercício 9. Fixe $m, n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$(k + m) + n = k + (m + n). \tag{$*$}$$

Para isso, procederemos por indução sobre $k \in \mathbb{N}$.

· Se $k = 0$, então

$$(k + m) + n = (0 + m) + n = m + n = 0 + (m + n) = k + (m + n).$$

· Suponhamos que $(*)$ valha para um certo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned}
(S(k) + m) + n &= n + (m + S(k)) && \text{(pela comutatividade da +)}\\
&= n + S(m + k) && \text{(pela definição da +)}\\
&= S(n + (m + k)) && \text{(pela definição da +)}\\
&= S((k + m) + n) && \text{(pela comutatividade da +)}\\
&= S(k + (m + n)) && \text{(pela hipótese de indução)}\\
&= S((m + n) + k) && \text{(pela comutatividade da +)}\\
&= (m + n) + S(k) && \text{(pela definição da +)}\\
&= S(k) + (m + n). && \text{(pela comutatividade da +)}
\end{aligned}$$

Portanto, vale a lei associativa da adição. ∎

Exercício 10. Primeiramente, mostraremos que

Afirmação. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se $S(m) < S(n)$, então $m < n$.

Demonstração. Se $S(m) \in S(n)$, então $m \in S(m) \in n$ ou $m \in S(m) = n$. Em qualquer dos casos, $m \in n$. ∎

Fixe $m, n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$m < n \Leftrightarrow m + k < n + k. \tag{$*$}$$

Para isso, procederemos por indução sobre $k \in \mathbb{N}$.

· Se $k = 0$, então
$$m < n \Leftrightarrow m + 0 < n + 0 \Leftrightarrow m + k < n + k.$$

· Suponhamos que $(*)$ valha para um certo $k \in \mathbb{N}$. Assim, se $m < n$, então

$$\begin{aligned} m + S(k) &= S(m + k) && \text{(pela definição da +)} \\ &< S(n + k) && \text{(pela hip. de ind. e exercício 3)} \\ &= n + S(k). && \text{(pela definição da +)} \end{aligned}$$

Por outro lado, se $m+S(k) < n+S(k)$, então, pela definição de soma, $S(m+k) < S(n+k)$. Daí, pela afirmação, $m + k < n + k$ e, pela hipótese de indução, $m < n$. ∎

Exercício 13. Mostraremos a comutatividade da multiplicação. Vamos provar, por indução sobre $n \in \mathbb{N}$, que
$$m \cdot n = n \cdot m \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

· Se $n = 0$, então $m \cdot n = m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot m = n \cdot m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

· Suponhamos $(*)$ valha para um certo natural n. Queremos mostrar que

$$m \cdot S(n) = S(n) \cdot m \tag{$**$}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Para isso, vamos proceder por indução sobre $m \in \mathbb{N}$.

· Se $m = 0$, então $m \cdot S(n) = 0 \cdot S(n) = 0 = S(n) \cdot 0 = S(n) \cdot m$.

· Agora, suponhamos que (∗∗) valha para um certo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned}
S(m) \cdot S(n) &= S(m) \cdot n + S(m) && \text{(pela definição da $\cdot$)}\\
&= n \cdot S(m) + S(m) && \text{(por $(*)$)}\\
&= (n \cdot m + n) + S(m) && \text{(pela definição da $\cdot$)}\\
&= n \cdot m + (n + S(m)) && \text{(pela associatividade da $+$)}\\
&= n \cdot m + S(n + m) && \text{(pela definição da $+$)}\\
&= n \cdot m + S(m + n) && \text{(pela comutatividade da $+$)}\\
&= n \cdot m + (m + S(n)) && \text{(pela definição da $+$)}\\
&= (n \cdot m + m) + S(n) && \text{(pela associatividade da $+$)}\\
&= (m \cdot n + m) + S(n) && \text{(por $(*)$)}\\
&= m \cdot S(n) + S(n) && \text{(pela definição da $\cdot$)}\\
&= S(n) \cdot m + S(n) && \text{(por $(*)$)}\\
&= S(n) \cdot S(m). && \text{(pela definição da $\cdot$)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lista 6

Exercício 1. (b) De $|A| \leq |B|$ e $|B| < |C|$ segue que existem funções injetoras $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$. Daí, $g \circ f\colon A \to C$ é injetora e, assim, $|A| \leq |C|$.

Resta mostrar que não ocorre $|A| = |C|$. Suponhamos o contrário. Então, existe uma função bijetora $h\colon C \to A$. Daí, $f \circ h\colon C \to A$ é injetora e segue que $|C| \leq |B|$. Por outro lado, $|B| < |C|$ implica $|B| \leq |C|$. De $|B| \leq |C|$ e $|C| \leq |B|$ segue, pelo teorema de Cantor-Bernstein, que $|B| = |C|$, contradizendo a hipótese de que $|B| \neq |C|$. $\blacksquare$

Exercício 4. Considere a função $f\colon S \to \wp(S)$ dada por $f(x) = \{x\}$ para todo $x \in S$. Afirmamos que f é injetora. De fato, se $x, y \in S$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $\{x\} = \{y\}$, o que implica $x = y$. $\blacksquare$

Exercício 8. Seja Y um conjunto finito. Vamos mostrar, por indução sobre $n \in \mathbb{N}$, que

$$|X \times Y| = n \cdot |Y| \text{ para todo conjunto } X \text{ tal que } |X| = n. \tag{$*$}$$

· Se $|X| = 0$, isto é, $X = \emptyset$, então $|X \times Y| = |\emptyset| = 0 = |X| \cdot |Y|$.

· Assuma $(*)$ e seja Y um conjunto com $n + 1$ elementos: $Z = \{\, z_0, \ldots, z_n \,\}$. Tome $X = \{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$. Note que:

- $Z \times Y = (X \cup \{z_n\}) \times Y = (X \times Y) \cup (\{z_n\} \times Y)$.
- $(X \times Y) \cap (\{z_n\} \times Y) = \emptyset$, pois $z_n \notin X$.
- $|Y| = |\{z_n\} \times Y|$, uma vez que a função $f \colon Y \to \{z_n\} \times Y$ dada por $f(y) = (z_n, y)$ para todo $y \in Y$ é uma bijeção.

Assim,

$$\begin{aligned}
|Z \times Y| &= |(X \times Y) \cup (\{z_n\} \times Y)| \\
&= |X \times Y| + |\{z_n\} \times Y| && \text{(pois } (X \times Y) \cap (\{z_n\} \times Y) = \emptyset) \\
&= |X \times Y| + |Y| \\
&= n \cdot |Y| + |Y| && \text{(pela hipótese de indução)} \\
&= (n+1) \cdot |Y|. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 12. (c) Como $|A_1| = |A_2|$, existe uma bijeção $f \colon A_1 \to A_2$. Considere a função $h \colon \mathrm{Seq}(A_1) \to \mathrm{Seq}(A_2)$ dada por $h(\langle x_0, \ldots, x_n \rangle) = \langle f(x_0), \ldots, f(x_n) \rangle$ para todo $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \in \mathrm{Seq}(A_1)$.

A função h é injetora. De fato, sejam $x = \langle x_0, \ldots, x_m \rangle, y = \langle y_0, \ldots, y_n \rangle \in \mathrm{Seq}(A_1)$ tais que $h(x) = h(y)$. Pela definição de h, $\langle f(x_0), \ldots, f(x_m) \rangle = \langle f(y_0), \ldots, f(y_n) \rangle$. Então, $m = n$ e $f(x_k) = f(y_k)$ para todo natural $k \leq n$. Como f é injetora, $x_k = y_k$ para todo $k \in \{ 0, \ldots, n \}$. Assim, $x = y$.

A função h é sobrejetora. De fato, seja $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle \in \mathrm{Seq}(A_2)$. Como a função f é bijetora, podemos tomar $x = \langle f^{-1}(y_0), \ldots, f^{-1}(y_n) \rangle$. Assim, $x \in \mathrm{Seq}(A_1)$ e $h(x) = \langle f(f^{-1}(y_0)), \ldots, f(f^{-1}(y_n)) \rangle = \langle y_0, \ldots, y_n \rangle$. $\blacksquare$

Exercício 14. Sejam A finito e B enumerável. Então, existem uma sequência injetora finita $\langle a_i \rangle_{i=0}^{n}$ tal que $A = \{ a_i \mid i = 1, \ldots, n \}$ e uma sequência injetora infinita $\langle b_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $B = \{ b_i \mid i \in \mathbb{N} \}$. Considere a sequência $\langle c_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$, onde

$$c_k = \begin{cases} a_k, & \text{se } k \leq n; \\ b_{k-n-1}, & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Como a imagem de toda sequência infinita é enumerável, basta mostrarmos que $A \cup B = \{ c_k \mid k \in \mathbb{N} \}$.

Segue imediatamente da definição de $\langle c_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ que $\{ c_k \mid k \in \mathbb{N} \} \subseteq A \cup B$.

Para vermos que $A \cup B \subseteq \{ c_k \mid k \in \mathbb{N} \}$, seja $x \in A \cup B$. Se $x \in A$, então $x = a_m$ para algum natural $m \leq n$ e, portanto, $c_m = a_m = x$. Se $x \in B$, então $x = b_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$ e, portanto, $c_{m+n+1} = b_m = x$. De qualquer modo, $x \in \{ c_k \mid k \in \mathbb{N} \}$. $\blacksquare$

Exercício 19. Seja $\mathscr{A}$ o conjunto de todas as sequências de números naturais que são progressões aritméticas. Seja $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathscr{A}$ a função dada por $f(x,y) = \langle x+ny \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ para todo $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

A função f é injetora. De fato, sejam $(x,y),(x',y') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tais que $f(x,y) = f(x',y')$. Então, $\langle x+ny \mid n \in \mathbb{N}\rangle = \langle x'+ny' \mid n \in \mathbb{N}\rangle$. Logo, $x+ny = x'+ny'$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x = x+0y = x'+0y' = x'$. Também temos $x+y = x'+y'$, o que implica $x+y = x+y'$ e, portanto, $y = y'$. Portanto, $(x,y) = (x',y')$.

A função f é sobrejetora. De fato, seja $\langle s_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ uma progressão aritmética de números naturais. Então, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n+1} = s_n + d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $f(s_0,d) = \langle s_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Como $f(s_0,d) = \langle s_0+nd \mid n \in \mathbb{N}\rangle$, basta mostrarmos que $s_0+nd = s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos proceder por indução sobre n:

· Se $n = 0$, então $s_0 + nd = s_0 + 0d = s_0$.

· Suponhamos que $s_0 + nd = s_n$ para um certo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + d \\ &= (s_0 + nd) + d && \text{(pela hipótese de indução)} \\ &= s_0 + (n+1)d. \end{aligned}$$

Como f é uma bijeção, temos que $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathscr{A}|$. Mas, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$. Portanto, $|\mathbb{N}| = |\mathscr{A}|$. ∎