MAT-331: ELEMENTOS DE TEORIA DOS CONJUNTOS

Respostas

Lista 1

1. (a) *Hipótese*: n é inteiro; *Tese*: $2n$ é um número par.

(b) *Hipótese*: Você pode trabalhar aqui; *Tese*: Você tem um diploma universitário.

(c) *Hipótese*: Um carro sem combustível; *Tese*: Não anda.

(d) *Hipótese*: Cruzar a linha de chegada primeiro; *Tese*: Receber a bandeirada.

(e) *Hipótese*: Diferenciabilidade; *Tese*: Continuidade.

(f) *Hipótese*: Normalidade; *Tese*: Regularidade.

(g) *Hipótese*: Eu almoço no bandejão; *Tese*: Eu tenho sono na aula das 14h.

(h) *Hipótese*: $x > 3$; *Tese*: $f(x) = 5$. $\blacksquare$

3. $(a)\ \neg(\neg p \wedge \neg q)$; $(b)\ \neg(p \wedge \neg q)$; $(c)\ \neg((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$. $\blacksquare$

5. (a) Existe um número x maior ou igual a zero tal que $|x| \neq x$.

(b) f é descontínua em algum ponto.

(c) f é descontínua em todos os pontos.

(d) Não existe um elemento neutro com relação a adição.

(e) Existem dois pontos por onde não passa reta alguma.

(f) Existem dois pontos por onde ou não passa reta alguma ou passa mais de uma reta.

(g) Existe uma cadeira com número de pernas diferente de quatro.

(h) Existe um jogador de futebol que não é inteligente.

(i) $\forall x > 1\,(f(x) \neq 3)$.

(j) $\exists x > 1\,(f(x) \leq 0 \text{ ou } f(x) \geq 4)$.

(k) $\forall x \in A(f(x) \leq x)$.

(l) $\forall y \leq 2\,(f(y) \geq 2 \text{ e } g(y) < 7)$.

(m) $\exists x \in A\, \forall y \in B\,(x \geq y \text{ ou } y \geq 1)$.

(n) $\forall x\, \forall y\,(x + y \neq 8)$.

(o) $\exists x\, \forall y\,(x \geq y \wedge y \geq x)$.

(p) $\forall x\, \exists y\,(y \geq x)$.

(q) $\exists x\, \forall y\,(x \geq y)$.

(r) $\exists x\, \forall y\, \exists z\,(x + y + z > xyz)$. $\blacksquare$

10. (a) Falsa. Contra-exemplo: $a = b = \emptyset$.

(b) Verdadeira.

(c) Falsa. Contra-exemplo: $a = \emptyset$.

(d) Verdadeira.

(e) Falsa.

(f) Verdadeira.

(g) Falsa. $\blacksquare$

13. (a) Verdadeira.

(b) Falsa. Contra-exemplo: $E = \{\{\emptyset\}\}$.

(c) Verdadeira.

(d) Falsa. Contra-exemplo: $E = \emptyset$. $\blacksquare$

16. (a) Falsa. Contra-exemplo: $A = C = \emptyset$ e $B = \{\emptyset\}$.

(b) Falsa. Contra-exemplo: $A = C = \emptyset$ e $B = \{\emptyset\}$.

(c) Falsa. Contra-exemplo: $x = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$ e $C = \{\{\emptyset\}\}$.

(d) Falsa. Contra-exemplo: $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $C = \{\emptyset\}$. $\blacksquare$

17. (a) Verdadeira.

(b) Falsa. Contra-exemplo: $A = \{\emptyset\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $b = \{\emptyset\}$.

(c) Verdadeira.

(d) Falsa. Contra-exemplo: $d = A = B = \{\emptyset\}$.

(e) Verdadeira.

(f) Verdadeira. ∎

20. (a) Falsa. Contra-exemplo: $x = \{\emptyset\}$ e $X = \{\{\emptyset\}\}$.

(b) Falsa. Contra-exemplo: $a = b = \emptyset$.

(c) Verdadeira.

(d) Falsa. Contra-exemplo: $a = b = \{\emptyset\}$.

(e) Verdadeira.

(f) Verdadeira.

(g) Falsa. Contra-exemplo: $a = b = \emptyset$.

(h) Falsa. ∎

Lista 2

1. Considere a propriedade $\mathbf{P}(z, y)$: $z \notin y$. Então, pelo axioma do esquema de separação, existe um conjunto r tal que $z \in r$ se, e somente se, $z \in x$ e $\mathbf{P}(z, y)$, isto é, se, e somente se, $z \in x$ e $z \notin y$. ∎

7. (b) Seja $x \in \bigcup b$. Então, existe $u \in b$ tal que $x \in u$. Por hipótese, $u \subseteq a$. Portanto, $x \in a$. ∎

10. (g) "$\subseteq$": Seja $x \in a \setminus (b \setminus c)$. Então, $x \in a$ e $x \notin b \setminus c$. Mas, $x \notin b \setminus c$ implica $x \notin b$ ou $x \in c$. Se $x \notin b$, então $x \in a \setminus b$. Se $x \in c$, então $x \in a \cap c$. De qualquer modo, $x \in (a \setminus b) \cup (a \cap c)$.

"$\supseteq$": Seja $x \in (a \setminus b) \cup (a \cap c)$. Então, $x \in a \setminus b$ ou $x \in a \cap c$. Se $x \in a \setminus b$, então $x \in a$ e $x \notin b$. Daí, $x \in a$ e $x \notin b \setminus c$ e, portanto, $x \in a \setminus (b \setminus c)$.

(h) $(\Rightarrow)$ $a = a \cap b \subseteq b$ e $b \subseteq a \cup b = a$. Portanto, $a = b$.

$(\Leftarrow)$ $a \cap b = a \cap a = a$ e $a \cup b = a \cup a = a$. ∎

15. (e) Suponha, por absurdo, que $\bigcap \wp(x) \neq \emptyset$. Então, existe um $y \in \bigcap \wp(x)$. Note que $y \in z$ para todo $z \in \wp(x)$. Como $x \setminus \{y\} \in \wp(x)$, temos que $y \in x \setminus \{y\}$ e, consequentemente, $y \notin \{y\}$, um absurdo. ∎

16. (a) "$\subseteq$": Seja $b \in x \setminus \bigcup \mathscr{C}$. Então, $b \in x$ e $b \notin \bigcup \mathscr{C}$. Mas, $b \notin \bigcup \mathscr{C}$ implica $b \notin a$ para todo $a \in \mathscr{C}$. Como $b \in x$, temos que $b \in x \setminus a$ para todo $a \in \mathscr{C}$, isto é, $b \in \bigcap \{x \setminus a \mid a \in \mathscr{C}\}$.

"$\supseteq$": Seja $b \in \bigcap \{x \setminus a \mid a \in \mathscr{C}\}$. Então, $b \in x \setminus a$ para todo $a \in \mathscr{C}$, ou seja, $b \in x$ e $b \notin a$ para todo $a \in \mathscr{C}$. Portanto, $b \in x$ e $b \notin \bigcup \mathscr{C}$, isto é, $b \in x \setminus \bigcup \mathscr{C}$. ∎

18. (a) "$\subseteq$": Seja $z \in b \cup \left(\bigcup \mathscr{C}\right)$. Então, $z \in b$ ou $z \in \bigcup \mathscr{C}$. Se $z \in b$, então $z \in b \cup a$ para todo $a \in \mathscr{C}$ e, portanto, $z \in \bigcup \{b \cup a \mid a \in \mathscr{C}\}$. Se $z \in \bigcup \mathscr{C}$, então existe $a \in \mathscr{C}$ tal que $z \in a$; assim, $z \in b \cup a$ e, portanto, $z \in \bigcup \{b \cup a \mid a \in \mathscr{C}\}$.

"$\supseteq$": Seja $z \in \bigcup \{b \cup a \mid a \in \mathscr{C}\}$. Então, existe $a \in \mathscr{C}$ tal que $z \in b \cup a$. Se $z \in b$, então $z \in b \cup \left(\bigcup \mathscr{C}\right)$. Se $z \in a$, então $z \in \bigcup \mathscr{C}$ e, consequentemente, $z \in b \cup \left(\bigcup \mathscr{C}\right)$. ∎

Lista 3

9. (a) Vamos mostrar que $R[X] = \mathrm{im}(R)$*. É imediato que $R[X] \subseteq \mathrm{im}(R)$. Para vermos que $\mathrm{im}(R) \subseteq R[X]$, seja $y \in \mathrm{im}(R)$. Então, existe x tal que $(x, y) \in R$. Como $R \subseteq X \times Y$, temos que $x \in X$. Portanto, $y \in R[X]$.

Agora, vamos mostrar que $R^{-1}[Y] = \mathrm{dom}(R)$†.

---

*$\mathrm{im}(R) = \{y \mid \text{existe } x \text{ tal que } (x, y) \in R\}$ e, para um conjunto A qualquer, $R[A] = \{y \in \mathrm{im}(R) \mid \text{existe } x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R\}$.

†$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \text{existe } y \text{ tal que } (x, y) \in R\}$ e, para um conjunto B qualquer, $R^{-1}[B] = \{x \in \mathrm{dom}(R) \mid \text{existe } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R\}$.

É imediato que $R^{-1}[Y] \subseteq \mathrm{dom}(R)$. Para vermos que $\mathrm{dom}(R) \subseteq R^{-1}[Y]$, seja $x \in \mathrm{dom}(R)$. Então, existe y tal que $(x,y) \in R$. Como $R \subseteq X \times Y$, temos que $y \in Y$. Portanto, $x \in R^{-1}[Y]$.

(c) Vamos mostrar que $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{im}(R^{-1})$.
"$\subseteq$": Seja $x \in \mathrm{dom}(R)$. Então, existe y tal que $(x,y) \in R$. Daí, $(y,x) \in R^{-1}$[‡]. Logo, $x \in \mathrm{im}(R^{-1})$.
"$\supseteq$": Seja $x \in \mathrm{im}(R^{-1})$. Então, existe y tal que $(y,x) \in R^{-1}$. Daí, $(x,y) \in R$ e, portanto, $x \in \mathrm{dom}(R)$. ∎

13. (b) Vamos mostrar que $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$.
"$\subseteq$": Seja $x \in (A_1 \cup A_2) \times B$. Então, existem $a \in A_1 \cup A_2$ e $b \in B$ tais que $x = (a,b)$. Se $a \in A_1$, então $x = (a,b) \in A_1 \times B$. Se $a \in A_2$, então $x = (a,b) \in A_2 \times B$. De qualquer modo, $x = (a,b) \in (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$.
"$\supseteq$": Seja $x \in (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$. Então, $x \in A_1 \times B$ ou $x \in A_2 \times B$. Se $x \in A_1 \times B$, então existem $a \in A_1$ e $b \in B$ tais que $x = (a,b)$; como $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$, temos que $a \in A_1 \cup A_2$ e, portanto, $x = (a,b) \in (A_1 \cup A_2) \times B$. Agora, se $x \in A_2 \times B$, procedendo de forma inteiramente análoga, concluímos que $x \in (A_1 \cup A_2) \times B$. ∎

16. (b) f é função. De fato, se $(x,y) \in f$ e $(x,z) \in f$, então $x + y = 0$ e $x + z = 0$. Portanto, $y = -x = z$.

(h) f não é função. De fato, $(2,4) \in f$ e $(2,8) \in f$. ∎

17. (b) $f[X] = f[\mathbb{N}] = \mathbb{Z}_-$ e $f^{-1}[Y] = f^{-1}[\mathbb{N}] = \mathbb{Z}_-$.

(h) $f[X] = f[\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}] = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $f^{-1}[Y] = f^{-1}[\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}] = \mathbb{N}^*$. ∎

18. $\mathrm{dom}(f_2 \circ f_1) = f_1^{-1}[\mathrm{dom}(f_2)] = f_1^{-1}[\mathbb{R}_+^*] = \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2}\right\}$;

$\mathrm{im}(f_2 \circ f_1) = f_2[\mathrm{im}(f_1)] = f_2[\mathbb{R}] = \mathbb{R}_+^*$.

$\mathrm{dom}(f_1 \circ f_2) = f_2^{-1}[\mathrm{dom}(f_1)] = f_2^{-1}[\mathbb{R}] = \mathbb{R}_+^*$;

$\mathrm{im}(f_1 \circ f_2) = f_1[\mathrm{im}(f_2)] = f_1[\mathbb{R}_+^*] = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$.

[‡] $R^{-1} = \{z \mid \text{existem } x \text{ e } y \text{ tais que } z = (x,y) \text{ e } (y,x) \in R\}$.

$\text{dom}(f_3 \circ f_4) = f_4^{-1}[\text{dom}(f_3)] = f_4^{-1}[\mathbb{R}] = \mathbb{R}^*$;

$\text{im}(f_3 \circ f_4) = f_3[\text{im}(f_4)] = f_3[\mathbb{R}^*] = \mathbb{R}^*$. ∎

21. (b) "$\subseteq$": Seja $x \in f^{-1}[A \setminus B]$. Então, existe $y \in A \setminus B$ tal que $(x, y) \in f$. Como $y \in A$, tem-se que $x \in f^{-1}[A]$. Agora, para ver que $x \notin f^{-1}[B]$, suponha o contrário, i.e., que $x \in f^{-1}[B]$. Então, existe $z \in B$ tal que $(x, z) \in f$. Assim, $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ e, como f é função, tem-se que $y = z$, donde $y \in B$, uma contradição. Portanto, $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

"$\supseteq$": Seja $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$. Uma vez que $x \in f^{-1}[A]$, existe $y \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Como $x \notin f^{-1}[B]$, temos que $y \notin B$. Assim, $y \in A \setminus B$ e, portanto, $x \in f^{-1}[A \setminus B]$. ∎