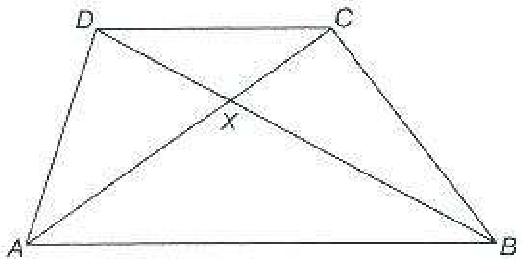
MAT 112 - VETORES E GEOMETRIA
1º SEMESTRE 2011
BACHARELADO - IF

LISTA 2

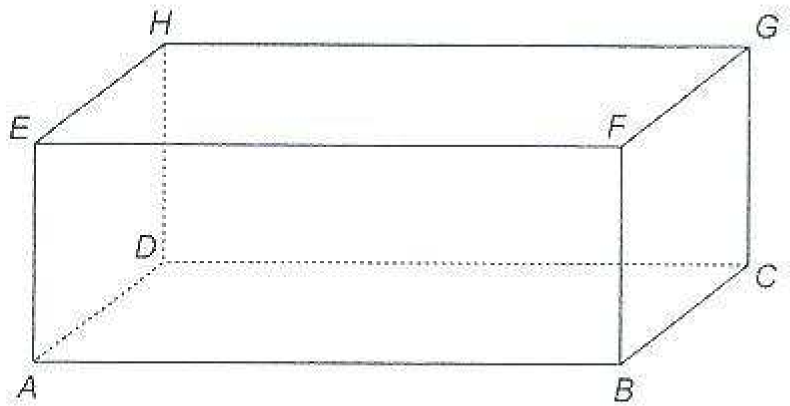
1. Prove que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é l.i., então:
   (a) $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ é l.i.;
   (b) $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ é l.i.
2. Prove que $\{\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}\}$ é l.d. para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
3. Determine os escalares a e b sabendo que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.i. e que $(a-1)\vec{u} + b\vec{v} = b\vec{u} - (a+b)\vec{v}$.
4. No trapézio $ABCD$ da figura abaixo, o comprimento de AB é o dobro do comprimento de CD. Exprima $\overrightarrow{AX}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB}$.



Nos exercícios 5 a 10 abaixo, as coordenadas dos vetores são dadas em relação a uma base qualquer fixada.

5. Suponha $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$.
   (a) Ache as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - 2\vec{v}$ e $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$.
   (b) Verifique se $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
   (c) Escreva $\vec{t} = (4, 0, 13)$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
6. $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$?
7. Decida se é l.d. ou se é l.i.:
   (a) $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$;
   (b) $\vec{u} = (0, 1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 3, 1)$;
   (c) $\vec{u} = (1, -3, 14)$ e $\vec{v} = (\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1)$;
   (d) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (200, 2, 1)$ e $\vec{w} = (300, 2, 1)$;
   (e) $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, -7)$ e $\vec{w} = (4, 5, -4)$;
   (f) $\vec{u} = (0, 0, 0)$;
   (g) $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

8. Ache $m \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{u} = (1,2,2)$ seja combinação linear de $\vec{v} = (m-1, 1, m-2)$ e $\vec{w} = (m+1, m-1, 2)$. Em seguida, determine m para que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja l.d.
9. Determine m e n tais que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seja l.d., sendo que $\vec{u} = (1, m, n+1)$ e $\vec{v} = (m, n, 10)$.
10. Ache m para que sejam l.d.:
    (a) $\vec{u} = (m, 1, m)$ e $\vec{v} = (1, m, 1)$;
    (b) $\vec{u} = (1 - m^2, 1 - m, 0)$ e $\vec{v} = (m, m, m)$;
    (c) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (1, 2, m)$ e $\vec{w} = (1, 1, 1)$;
    (d) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (0, 1, m)$ e $\vec{w} = (0, m, 2m)$.
11. Sejam $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base e $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ e $\vec{f_3} = \vec{e_3}$. Decida se $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base.
12. Se $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é uma base, prove que $(\alpha_1\vec{e_1}, \alpha_2\vec{e_2}, \alpha_3\vec{e_3})$ é uma base se, e somente se, α_1, α_2 e α_3 não são nulos. Interprete geometricamente.
13. Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio de BC.
    (a) Explique por que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ é uma base.
    (b) Determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nesta base.
14. No paralelepípedo retângulo da figura abaixo, HG, BC e CG medem, respectivamente, 3, 1 e 2.
    (a) Explique por que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ é uma base e verifique se é ortonormal.
    (b) Explique por que, em relação à base do item (a), $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$.
    (c) Mostre que o comprimento da diagonal AG é $d = \sqrt{14}$.
    (d) Note que se simplesmente aplicarmos a fórmula para calcular a norma de um vetor dada em aula, obteríamos que o comprimento de $\overrightarrow{AG}$ é $\sqrt{3}$. Por que o valor dá diferente do obtido no item (c)?



15. Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base ortonormal. Calcule $||\vec{u}||$ nos seguintes casos:
    (a) $\vec{u} = (1, 1, 1)_E$;
    (b) $\vec{u} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$;
    (c) $\vec{u} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$;
    (d) $\vec{u} = -4\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$.

16. Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária, calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$.
17. São dadas as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em relação a uma base ortonormal fixada. Calcule, em radianos, a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
    (a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$.
    (b) $\vec{u} = (3, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$.
    (c) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
18. Determine x de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais.
    (a) $\vec{u} = (x, x, 4)$, $\vec{v} = (4, x, 1)$.
    (b) $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$, $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$.
    (c) $\vec{u} = (x, -1, 4)$, $\vec{v} = (x, -3, 1)$.
19. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e a $\vec{v} = (2, -4, 6)$. Quais desses vetores forma ângulo agudo com $(1, 0, 0)$?
20. Obtenha um vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e a $\vec{w} = (1, -2, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.
21. Dados $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, -1)$ e $\vec{t} = (2, 1, -1)$, obtenha $\vec{u}$ de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $\vec{t}$, tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja l.d. Algum dos vetores encontrados forma ângulo agudo com $(-1, 0, 0)$?
22. Sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $||\vec{u}|| = \frac{3}{2}$, $||\vec{v}|| = \frac{1}{2}$ e $||\vec{w}|| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.
23. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de norma 1 tais que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2}$. Verifique se $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
24. (a) Mostre que $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
    (b) Calcule $||2\vec{u} + 4\vec{v}||^2$, sabendo que $\vec{u}$ é unitário, $||\vec{v}|| = 2$ e a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{2\pi}{3}$ radianos.
25. Prove que:
    (a) $4\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2$;
    (b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow ||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u} - \vec{v}||$;
    (c) as diagonais de um paralelogramo têm comprimentos iguais se, e somente se, o paralelogramo é um retângulo.
26. Prove que as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares se, e somente se, o paralelogramo é um losango.
27. A medida angular em radianos entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{4}$, $||\vec{u}|| = \sqrt{5}$ e $||\vec{v}|| = 1$. Calcule a medida angular em radianos entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.
28. Prove que:
    (a) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 2(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2)$;
    (b) a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados;
    (c) a diagonal maior de um paralelogramo é maior do que cada um dos quatro lados.
29. Prove que as diagonais de um losango estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.