MAT 2352 - CÁLC. PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS VAR. II
2º SEMESTRE 2010

LISTA 5

1. Em cada caso abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não um campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine uma função potencial.

   (a) $\vec{F}(x, y) = (x, x)$ em $\mathbb{R}^2$
   (b) $\vec{F}(x, y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$ em $\mathbb{R}^2$
   (c) $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,,\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ em $\Omega = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ se } y = 0\}$
   (d) $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\,,\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

2. Um campo de forças $\vec{F}$ é dito central, no plano, se $\vec{F}$ pode ser escrito na forma

   $$\vec{F}(x, y) = g(r)\vec{r} \quad \text{onde} \quad \vec{r} = (x, y),\ r = \|\vec{r}\|$$

   e g é da classe C^1 em $\mathbb{R}$. Mostre que $\vec{F}$ é um campo conservativo.

3. Calcule as seguintes integrais triplas:

   (a) $\iiint\limits_D yz\,dx\,dy\,dz$, onde $D = \{(x, y, z) \mid 0 \le z \le 1,\ 0 \le y \le 2z \text{ e } 0 \le x \le z + 2\}$
   (b) $\iiint\limits_D y\,dx\,dy\,dz$, onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região do plano xy limitado pelas curvas $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$.
   (c) $\iiint\limits_D xy\,dx\,dy\,dz$, onde D é o tetraedro sólido com vértices $(1, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.
   (d) $\iiint\limits_D x\,dx\,dy\,dz$, onde D é limitado pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.
   (e) $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz$, onde V é a região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, limitada pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2$.
   (f) $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$, onde V é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

   Resp.: a) $7/5$, b) $5/28$, c) $1/10$, d) $16\pi/3$, e) 0, f) $4\pi/5$.

4. Escreva as integrais abaixo em duas ordens diferentes da original e esboce o domínio de integração:

   (a) $\int_0^2 \int_0^z \int_0^x f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz$
   (b) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^{y+2} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$

5. Calcule $\iiint\limits_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ com W e f dados abaixo:

   (a) $f(x, y, z) = z^2$ e W limitado por $z = 0$, $x^2 + z = 1$ e $y^2 + z = 1$.
   (b) $f(x, y, z) = xyz$ e W é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ que está no primeiro octante.

   Resp.: a) $1/3$, b) $a^6/48$

6. Calcule o volume dos sólidos a seguir:

   (a) limitado por $x^2 + y^2 = a^2$ e por $z = b(x^2 + y^2)$, $b > 0$ e pelo plano $z = 0$.
   (b) limitada por $z = x^2 + y^2$, $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ e $z = 0$.
   (c) cone com raio de base a e altura h.

   Resp.: a) $\pi b a^4/2$, b) $\pi/8$, c) $\pi a^2 h/3$