

MAT 2352 - CÁLC. PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS VAR. II
2º SEMESTRE 2010

LISTA 4

1. Seja $\gamma(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t, 2t - t^2)$, $t \in [0, 2]$.

- (a) Verifique que γ é fechada.
- (b) Mostre que $(0, -1, 3/4)$ é ponto múltiplo de γ .
- (c) Escreva as equações das retas tangentes à curva γ no ponto $(0, 1, 0)$.

2. Dê a reparametrização pelo comprimento de área das seguintes curvas:

- (a) $\gamma(t) = (a \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$
- (b) $\gamma(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$

3. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F}$ para:

- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (xy, -y, 1)$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$
- (b) $\vec{F}(x, y) = (y, x^2 + y^2)$, γ formada pelos segmentos que ligam $(-2, 0)$ a $(0, 0)$ e $(0, 0)$ a $(0, 2)$.
- (c) $\vec{F}(x, y, z) = (2x, -3y, z^2)$, onde $\gamma = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- (d) $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, 0, x^2)$, onde γ é a reunião dos segmentos de reta que unem $(1, 0, 0)$ a $(3, 0, 1)$ e $(3, 0, 1)$ a $(2, 0, 4)$.

Resp.: a) $3/4$, b) $8/3$, c) $\pi^3/24 - 5/2$, d) 14

4. Calcule:

- (a) $\int_{\gamma} 2yz dx + (z^2 - y^2) dz$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$ e $y^2 + z^2 = 4$ de $(0, 2, 0)$ a $(0, 0, 2)$.
- (b) $\int_{\gamma} \sqrt{y} dx + \sqrt{x} dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x = 0$, $y = 1$ e $y = x^2$, percorrida no sentido anti-horário.
- (c) $\int_{\gamma} 2y dx + z dy + x dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, percorrida uma vez no ponto $(1, 0, 0)$ ao ponto $(-1, 0, 0)$.
- (d) $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, percorrida uma vez no sentido anti-horário quando vista da origem.

Resp.: a) $-8/3$, b) $-3/10$, c) 0 , d) $2\sqrt{2}\pi$

5. Prove que o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x, y) = (x, xy)$ é nulo ao longo de qualquer circunferência com centro no eixo das abscissas.

- 6. (a) Um cabo delgado é dobrado na forma de um semi-círculo $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Se a densidade linear é x^2 , determine a massa e o centro de massa do cabo. Resp.: 4π e $(16/3/\pi, 0)$
- (b) Calcule a massa e o centro de massa de uma mola que tem a forma de hélice cuja equação é dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ e densidade $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

7. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

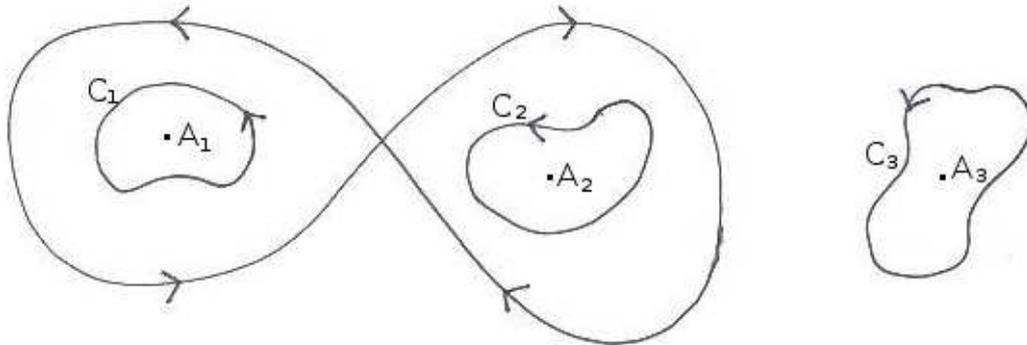
- (a) $\int_{\gamma} x^2y dx + xy^3 dy$ onde γ é o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
 (b) $\int_{\gamma} (x + 2y)dx + (x - 2y)dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ e do segmento de reta de $(1, 1)$ a $(0, 0)$.
 (c) $\int_{\gamma} x^2 dx + y^2 dy$, γ é a curva $d\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ percorrendo no sentido anti-horário.
 (d) $\int_{\gamma} 2xy dx + (x^2 + x)dy$, γ é a cardióide $r = 1 + \cos \theta$ orientada no sentido anti-horário.

Resp.: a) $-1/12$, b) $-1/6$, c) 0 , d) $3\pi/2$

8. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes. Dê todos os possíveis valores para as integrais:

- (a) $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$
 (b) $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + 9y^2}$

9. Seja $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ com P e Q com derivada parciais contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{A_1, A_2, A_3\}$ e satisfazendo $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ em $\mathbb{R}^2 - \{A_1, A_2, A_3\}$. Sejam C_1, C_2, C_3 e C como indicados na figura abaixo. Se $\int_{C_1} \vec{F} = 2$, $\int_{C_2} \vec{F} = 3$ e $\int_{C_3} \vec{F} = 4$, calcule $\int_C P dx + Q dy$ e determine uma curva C' para a qual $\int_{C'} P dx + Q dy = 3$.



10. Em cada caso abaixo, determine se \vec{F} é ou não um campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine uma função potencial.

- (a) $\vec{F}(x, y) = (x, x)$ em \mathbb{R}^2
 (b) $\vec{F}(x, y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$ em \mathbb{R}^2
 (c) $\vec{F}(x, y) = \left(d\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ em $\Omega = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ se } y = 0\}$
 (d) $\vec{F}(x, y) = \left(d\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

11. Mostre que as integrais independem do caminho e calcule-as:

- (a) $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy dx + (x^2 + y^2)dy$
 (b) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin y dx + x \cos y dy$

Resp.: $(3a^2b - b^3 - 2)/3$

Resp.: $a \sin b$

12. Um campo de forças \vec{F} é dito central, no plano, se \vec{F} pode ser escrito na forma

$$\vec{F}(x, y) = g(r)\vec{r} \text{ onde } \vec{r} = (x, y), r = \|\vec{r}\|$$

e g é da classe C^1 em \mathbb{R} . Mostre que \vec{F} é um campo conservativo.